Российская академия наук
Институт психологии

М. А. Холодная, Э. Г. Гельфман

РАЗВИВАЮЩИЕ УЧЕБНЫЕ ТЕКСТЫ КАК СРЕДСТВО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ

Издательство
«Институт психологии РАН»
Москва – 2016

УДК 159.9
ББК 88
Х 73

Холодная М. А., Гельфман Э. Г.

Х 73 Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2016. – 200 с.

ISBN 978-5-9270-0320-4

УДК 159.9
ББК 88

В книге обсуждаются психологические основы интеллектуального воспитания учащихся в рамках психодидактического подхода. Обосновывается роль текста как фактора интеллектуального развития личности. Предлагается технология обучения, согласно которой средствами содержания школьного образования на основе специально сконструированных развивающих учебных текстов осуществляется обогащение когнитивного, понятийного, метакогнитивного и интенционального опыта учащихся. Описывается психодидактическая типология развивающих учебных текстов и приводятся образцы разных типов текстов (на примере курса математики для 5–9-х классов). Рассматриваются приемы работы с учебным текстом.

Книга предназначена для школьных учителей, специалистов в области психологии, педагогики, теории и методики обучения, организаторов образования, студентов педагогических университетов.

РНФ *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 14-28-00087, Институт психологии РАН*

ISBN 978-5-9270-0320-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современные социальные вызовы приводят к тому, что интеллектуальные способности людей начинают рассматриваться в качестве ключевого фактора прогрессивного развития общества. Поэтому неудивителен рост интереса к проблемам школьного образования, – и прежде всего к инновационным образовательным технологиям, – поскольку именно общеобразовательная школа является важнейшим социальным институтом, в рамках которого воспроизводятся, восстанавливаются и качественно улучшаются интеллектуальные ресурсы общества.

Простой, казалось бы, вопрос о том, зачем дети ходят в школу, на самом деле не имеет простого ответа. Чтобы получить знания? Да, однако знания быстро устаревают, поэтому гораздо важнее не просто получить знания, а научиться их анализировать и при необходимости добывать самостоятельно. Чтобы усвоить необходимый социальный опыт? Безусловно, однако цель школьного образования нельзя сводить к социальной адаптации ученика (к так называемой «функциональной грамотности»), потому что в реальной жизни гораздо более важную роль играет способность противостоять давлению социальных обстоятельств и справляться с нестандартными жизненными трудностями. Чтобы хорошо сдать ЕГЭ и получить достойное высшее образование? Конечно, но успешное профессиональное обучение и тем более профессиональная карьера не зависят от баллов ЕГЭ, а определяются способностями и мотивацией выпускника.

Так зачем же дети 11 лет проводят в стенах школы? У общеобразовательной школы есть одна главная задача, которая остается неизменной вне зависимости от текущих социальных обстоятельств, – обеспечить условия для интеллектуального и личностного роста каждого ученика средствами учебно-воспитательного процесса.

Каждый учитель, входя в класс, пытается в той или иной мере решить данную задачу. Для этого ему приходится тратить силы и время на разработку увлекательного урока, поиск интересных заданий, продумывание приемов индивидуализации обучения и т. п. Однако в современных условиях в связи с введением новых ФГОС резко возросли требования к образовательным результатам, что рискует обернуться неприемлемым увеличением интенсивности труда школьного учителя. Поэтому именно сейчас учителя объективно нуждаются в учебных материалах нового поколения, которые обеспечивают интеллектуальное и личностное развитие школьников, в том числе формирование универсальных учебных действий (УУД).

Разработка инновационного содержания школьного образования возможна в рамках *психодидактического подхода:* когда учебное содержание конструируется с одновременным учетом психологических, дидактических, методических и предметных знаний.

Приоритетной задачей современной школы является задача интеллектуального воспитания учащихся. *Интеллектуальное воспитание* – это такая форма организации учебной деятельности, которая обеспечивает условия для раскрытия и совершенствования индивидуальных интеллектуальных ресурсов каждого ученика. На наш взгляд, важнейшим направлением этой работы является интеллектуальное воспитание учащихся средствами содержания школьного образования на основе специально сконструированных учебных текстов, обеспечивающих обогащение основных форм ментального (умственного) опыта учеников – когнитивного, понятийного, метакогнитивного, интенционального (эмоционально-оценочного).

Безусловно, главнейшее назначение школы – передать представителями подрастающего поколения знания, накопленные в истории человечества. Однако передать детям знания путем прямой трансляции невозможно: большая часть знаний не будет воспринята, наиболее существенные аспекты знания окажутся не понятыми, усвоенные знания лягут в памяти «мертвым грузом» – то есть мы рискуем получить всего лишь имитацию знания. Иными словами, если учебные знания являются прямой «проекцией» научных знаний, то они далеко не всегда будут способствовать росту интеллекта учащихся, более того, такие знания могут заблокировать развитие индивидуальных интеллектуальных способностей (например, в силу отсутствия адекватной мотивации для их усвоения, «конфликта стилей» ученика и формы их предъявления и т. п.).

Чтобы избежать этой беды (а это действительно беда, когда учитель пребывает в иллюзии, что он учит, тогда как на самом деле учебная информация задевает сознание учеников, что называется, «по касательной»), необходимо учитывать психологические механизмы, лежащие в основе усвоения содержания предметных учебных курсов (научных понятий, способов познавательной деятельности, ценностных оснований научного знания и т. д.). Необходимо подчеркнуть: *понимание* учеником того, что он изучает, не может быть результатом каких-либо одномоментных действий (прочитал, запомнил, решил три задачи и т. п.), оно является следствием состояния ума ученика, к которому его еще надо подвести за счет постепенной реорганизации его ментального (умственного) опыта.

Скажем еще об одном важном обстоятельстве. Любой ученик будет учиться с увлечением, если его умственная деятельность будет осуществляться в психологически комфортном режиме. Под психологически комфортным режимом мы понимаем такой тип обучения, который соответствует реальному устройству детского ума и позволяет каждому ученику самостоятельно выбирать наиболее предпочтительную для него форму интеллектуального поведения.

В данной книге обсуждается значение содержания школьного образования и текста в интеллектуальном развитии личности; обосновывается роль учебных текстов в контексте решения задачи интеллектуального воспитания учащихся; вводится понятие «развивающие учебные тексты», психологическим адресатом которых являются основные компоненты ментального (когнитивного, понятийного, метакогнитивного, интенционального) опыта ученика; формулируются психодидактические требования к развивающим учебным текстам; описывается психодидактическая типология развивающих учебных текстов; приводятся примеры каждого типа текстов с их краткой характеристикой (из курса математики 5–9-х классов). Примеры учебных математических текстов взяты из учебников, учебных книг, рабочих тетрадей, практикумов образовательного проекта «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ), в рамках которого разработана *«обогащающая модель» обучения математике средствами специально сконструированных развивающих учебных текстов.*

Проект МПИ – результат многолетней работы большого коллектива ученых (математиков, методистов, психологов) из разных городов России. Мы приносим слова огромной благодарности учителям, работающим в проекте МПИ, за помощь, поддержку, советы и критику. Мы особенно благодарны детям, которые – без преувеличения – являются соавторами отдельных фрагментов учебных текстов. Мы благодарны редакторам издательства «Бином. Лаборатория знаний» – Маховой Ирине Анатольевне и Шиховой Надежде Анатольевне – за колоссальную работу по редактированию и подготовке к изданию всех учебно-методических комплектов МПИ для 5–9-х классов, состоящих в общей сложности из 19 книг.

ГЛАВА 1

Психологические основы интеллектуального воспитания учащихся: психодидактический подход

1.1. Психодидактический подход и задача интеллектуального воспитания учащихся средствами содержания образования

В традиционной системе обучения, построенной на основе *предметноцентрического* подхода, критерии эффективности учебной подготовки учащихся связываются главным образом с уровнем сформированности знаний, умений и навыков (ЗУН) в том или ином учебном предмете. На определенном этапе реформирования российской школы конечный образовательный результат был низведен до уровня «функциональной грамотности» (Концепция модернизации российского образования..., 2001), под которой понималась совокупность навыков, позволяющих выпускнику школы успешно справляться с бытовыми (жизненными) ситуациями (вычислить проценты при оформлении кредита, написать резюме на английском языке, найти информацию в Интернете, вести здоровый образ жизни, правильно ориентироваться в текущих политических событиях и т. п.).

В рамках инновационных технологий обучения, разработанных на основе *психодидактического* подхода, акценты принципиально меняются: в качестве критериев оценки эффективности учебного процесса выступают те изменения в интеллекте и личности ученика, которые связаны с ростом его индивидуальных ментальных ресурсов и характеризуют его как успешного субъекта собственной жизнедеятельности (в том числе за пределами требования социальной адаптации).

Психодидактика – это область педагогики, в рамках которой конструируются содержание, формы и методы обучения, основанные на интеграции психологических, дидактических, методических и предметных знаний с приоритетом учета психических закономерностей развития личности в качестве основы организации образовательного процесса (Рахимов, 2003; Панов, 2004; Гельфман, Холодная, 2006; Крутский, 2008; Подольский, 2005; Selby, Calhoun, 1980; Матюшкин, 2008; Боженкова, 2007; и др.).

Пионерами психодидактики в отечественной педагогике были Л. В. Занков (1999) и В. В. Давыдов (1996), разработавшие психологически ориентированные модели обучения для младших школьников. Психодидактические идеи в свое время активно обсуждались и при разработке требований к современному учебнику (Каким быть учебнику..., 1992; Проблемы школьного учебника, 2004).

Результатом психодидактической работы является некоторый качественно новый педагогический продукт (учебник нового типа, учебно-методический комплект, учебные материалы для самостоятельной работы и т. д.), сконструированный с учетом одновременно психологического, дидактического, методического и предметного знания. Основное назначение психодидактики – создание условий для психологического роста учащихся на основе повышения эффективности обучения конкретному предмету.

Пути реализации психодидактического подхода в школьном образовании могут быть разными: использование в учебном процессе «дидактических ситуаций», которые выстраивают знания учащихся, в том числе с опорой на метафоры и эмоциональный контекст (Broussau, 1997); ориентация на понимание учебного материала (Граник, Бондаренко, Концевая, 1991); формирование понятий на основе учета влияния каждой математической задачи на процесс обучения (Simon, 1995; Simon, Tzur, 2004); учет психологических закономерностей развития «теоретического мышления» (Давыдов, 1996); формирование базовых познавательных действий, таких как опознание, комбинирование, конструирование, как основы обучения понятиям с опорой на личный опыт учеников (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001; Bikner-Ahsbahs, 2004), развитие навыков креативного мышления учащихся (Burke, Williams, 2008), учет закономерностей формирования концептуальных структур как основы развития общих и специальных способностей (Волкова, 2014; Volkova, 2015) и др.

Иными словами, психодидактический подход предполагает перестройку содержания современного школьного образования с учетом психологических знаний о закономерностях психического (интеллектуального и личностного) развития детей школьного возраста.

В настоящее время просматривается весьма опасная тенденция – попытка нивелировать (обесценить) содержание школьного образования: либо в мягком варианте в виде замены предметных курсов на так называемые «интегрированные», либо в жестком варианте в виде утверждения, что учебный процесс может осуществляться на любом содержании. Апофеозом этой тенденции является попытка внедрить в педагогическое сообщество контрпродуктивную идею о необходимости использования одного учебника по каждому школьному предмету, – идею, реализация которой окончательно ликвидирует проблему содержания школьного образования с его уникальными возможностями с точки зрения разработки различных методических моделей организации учебного процесса (таблица умножения, конечно, одна, однако способов ее изучения может быть много, при этом различные методические подходы – и разные учебники – будут различаться по своей эффективности).

Игнорирование роли содержания школьного образования часто обосновывается следующим аргументом: главное – это самоопределение и самореализация ученика, поэтому содержание учебного курса должно «порождаться» самими учениками в диалоге с учителем. При этом не учитывается то принципиально важное обстоятельство, что с психологической точки зрения развитие интеллекта осуществляется только лишь через процесс усвоения, переработки и порождения разнообразных предметных содержаний, начиная с простейших житейских впечатлений и заканчивая научными знаниями об устройстве Вселенной. Чем в более обогащенную предметную (физическую, социальную, образовательную) среду погружен ребенок дошкольного и школьного возраста и чем активнее он с этой средой взаимодействует, тем выше будет уровень интеллектуальных способностей подрастающего человека.

При этом решающее значение имеет качество предъявляемого предметного содержания (развивающие эффекты будут разными, если ребенок будет учиться читать на комиксах либо на сказках Андерсена; если ученик будет осваивать математические знания через решение множества однотипных задач либо через анализ и обсуждение проблемных ситуаций).

Хотелось бы еще раз подчеркнуть: попытки отказаться от «лишних» знаний, избежать «перегрузки» учащихся за счет отказа от «абстрактных» теоретических знаний в пользу практико-ориентированных знаний и т. п. – это не просто крайне рискованный, но в конечном счете деструктивный вариант изменения содержания школьного образования. Ибо дело не в самих знаниях как таковых, а в тех психических механизмах, которые «останутся» у ученика даже после того, как усвоенные, проанализированные и критически осмысленные предметные знания забудутся. Главное – не то, сколько знаний и какие именно знания включены в учебный процесс, а то, как организованы учебные знания и в какой мере они являются средством психического (интеллектуального и личностного) развития и воспитания школьников.

Необходимо подчеркнуть еще одно важное обстоятельство. Традиционно отмечается, что после перехода из начальной школы в основную у учащихся наблюдается спад мотивации, снижение успеваемости и рост тревожности из-за возрастания дисциплинарных нагрузок и трудностей, связанных с усложнением учебного материала. Образовательная практика показывает, что подобного рода дезадаптация в той или иной мере проявляется у всех учащихся, включая даже хорошо успевающих младших школьников (Чепракова, Фролов, 2015). В контексте этой тенденции особо актуальными представляются результаты исследования Л. А. Ясюковой, согласно которым проявления дезадаптации являются вторичным эффектом по отношению к трудностям, которые дети испытывают при освоении предметного содержания учебного материала. Соответственно ведущим условием успешной адаптации к предметному содержанию образования в основной школе является формирование понятийного мышления учащегося (Ясюкова, 2005).

Важно подчеркнуть, что адекватные механизмы адаптации учащихся к предметному содержанию учебных материалов, представленных в традиционной форме «справочника» либо «задачника», самопроизвольно не сформируются. Следовательно, необходима принципиальная перестройка содержания школьного образования на основе психодидактического подхода, с тем чтобы конструкция учебного материала (учебника, учебной книги, практикума) соответствовала закономерностям функционирования детского ума и потребностям его развития.

Один из путей решения этой задачи представлен в образовательном проекте «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ). В рамках этого проекта подготовлены учебные материалы по курсу математики для 5–9 классов, разработанные на основе психодидактического подхода и ориентированные на решение задачи интеллектуального воспитания учащихся средствами специально сконструированных развивающих учебных текстов.

Проект МПИ представлен в виде учебно-методических комплектов (УМК) в курсе математики для 5–9-х классов. В частности, в УМК МПИ для 5–6-х классов входят учебники по математике, сюжетные учебные книги, практикумы-задачники, рабочие тетради, обучающий компьютерный комплекс «Компетентность. Инициатива. Творчество» (КИТ). УМК МПИ для 7–9-х классов включает учебники по алгебре, практикумы-задачники, электронные образовательные ресурсы к учебникам. УМК снабжены программами по математике для 5–6-х и 7–9-х классов, а также методическими пособиями для учителя. Вспомогательным элементом данной образовательной технологии является электронный учебник (электронный УМК), который позволяет учителю более гибко строить учебный процесс с учетом образовательных потребностей каждого ученика.

В проекте МПИ разработана обогащающая модель обучения (на примере школьного курса математики) (Обогащающая модель обучения..., 2002; Гельфман, Холодная, 2006; Гельфман, Подстригич, 2006; Дозморова, 2008; Ксенева, 2006; Просвирова, 2006; Пустынникова, Лизура, Сазанова, 2004; Смолякова, 2006; Гельфман, Дозморова, Демидова, 2014). Слово «обогащение» в названии предлагаемой модели обучения означает, что средствами учебных текстов, во-первых, формируются основные компоненты ментального (когнитивного, понятийного, метакогнитивного, интенционального) опыта ученика как основы развития его интеллекта и, во-вторых, создаются условия для учета и расширения репертуара его познавательных стилей.

1.2. Обогащение ментального (умственного) опыта как психологическая основа интеллектуального воспитания учащихся

Интеллектуальное воспитание – это такая форма организации учебного процесса, в рамках которой создаются условия для совершенствования интеллектуальных ресурсов каждого ученика за счет обогащения разных форм индивидуального ментального опыта – когнитивного, понятийного, метакогнитивного, интенционального (эмоционально-оценочного), а также обогащения репертуара способов интеллектуального поведения (познавательных стилей). Не вдаваясь в обсуждение различий между «обучением» и «воспитанием», отметим, что воспитание всегда ориентировано на развитие индивидуальности.

Представляет интерес сама этимология слова «воспитание», которое происходит от основы слова «питать» (от старославянского *«питати»,* образованного с помощью суффикса *«-ати»* и основы *«пита»* – пища, хлеб). Слова «воспитывать» и «вскармливать» не без основания рассматриваются как синонимы. Необходимо обратить внимание и на семантику приставки *«вос-»,* которая указывает на направление действия – устремление вверх, ввысь, к высшим идеалам (ср.: восхождение, воспарение, вознесение).

Таким образом, интеллектуальное воспитание в условиях школьного образования – это создание условий для роста («воспарения») интеллектуальных возможностей ученика посредством предоставления ему необходимой для этого и подходящей именно ему «интеллектуальной пищи», в качестве которой выступает содержание школьного образования. Обычная пища, чтобы ее можно было с пользой употребить, должна быть приготовлена, соответственно, и содержание школьного образования, чтобы с его помощью можно было интеллектуально воспитать ученика, должно быть специальным образом сконструировано с учетом психических закономерностей устройства и функционирования детского интеллекта.

Интеллектуальное воспитание учащихся предполагает:

- ориентацию на качественное изменение знаний, умений, навыков учеников (формирование не просто предметных знаний, а компетентности в данной предметной области; не просто учебных умений, а универсальных учебных действий; не просто познавательных навыков, а готовности работать в режиме исследования, проектной деятельности, самообучения);
- оценку индивидуальных достижений не только с учетом нормативных требований по типу «сравнение меня с другими», но и с точки зрения своеобразия индивидуальных интеллектуальных ресурсов по типу «сравнение меня с самим собой»;
- наличие образовательного пространства, которое предоставляет ученику возможность выбора индивидуальной траектории обучения с опорой на его личный опыт;
- создание условий не только для усвоения готового знания, но и самостоятельного открытия новых знаний и т. д.

Психологические основы интеллектуального воспитания

Психологической основой интеллектуального воспитания является процесс обогащения ментального (умственного) опыта ученика как условие роста его интеллекта. Чтобы обогащать ментальный опыт учащихся в процессе обучения, нужно знать его устройство. На рисунке 1 приводится структурная модель интеллекта, иллюстрирующая особенности его организации с точки зрения состава и строения ментального опыта субъекта (Холодная, 2002, 2004, 2012).

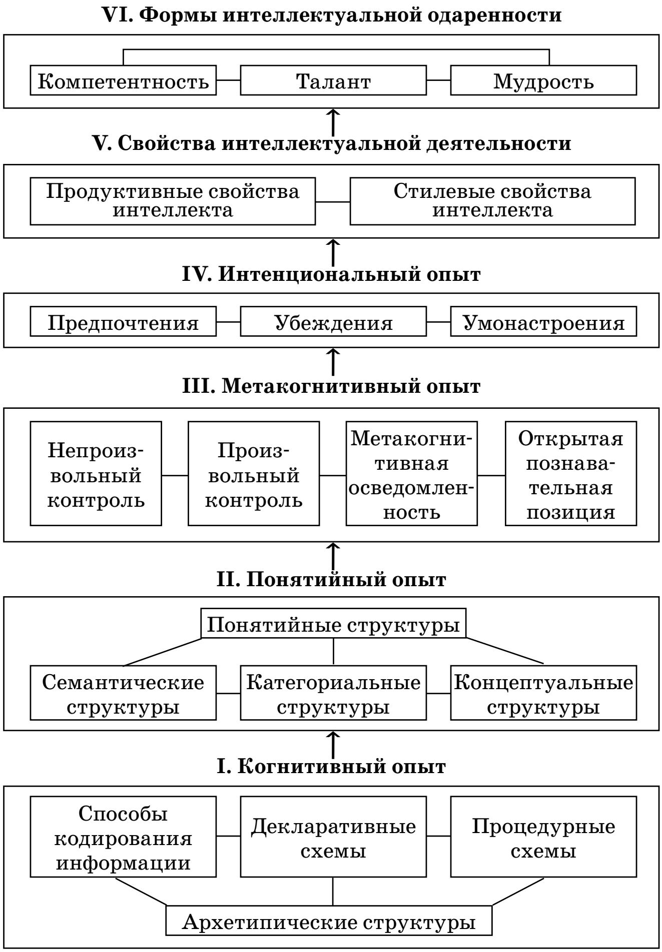


Рис. 1. Структурная модель интеллекта как формы организации ментального опыта субъекта

Согласно предложенной структурной модели интеллекта, в составе ментального опыта можно выделить четыре уровня, каждый из которых имеет свое назначение:

1) *когнитивный опыт* – это ментальные структуры (**«когнитивные схемы»**), отвечающие за хранение, упорядочивание и преобразование наличной и поступающей информации. Их основное назначение – оперативная переработка информации;
2) *понятийный опыт* – это ментальные структуры (**«концепты»**), обеспечивающие обобщение и конструирование информации на основе процедур категоризации, абстрагирования, объяснения, интерпретации. Их основное назначение – выявление существенных признаков и воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых, закономерных аспектов его окружения;
3) *метакогнитивный опыт* – это ментальные структуры (**«метакогниции»**), позволяющие осуществлять непроизвольную и произвольную саморегуляцию процесса переработки информации, а также сознательно управлять работой собственного интеллекта. Их основное назначение – контроль за ходом интеллектуальной деятельности и состоянием индивидуальных интеллектуальных ресурсов;
4) *интенциональный* (*эмоционально-оценочный*) *опыт* – это ментальные структуры (**«интенции»**), которые лежат в основе индивидуальных познавательных склонностей. Их основное назначение – участвовать в формировании и актуализации субъективных предпочтений (определенного предметного материала, способа решения проблем, источников информации и т. д.).

Особенности организации когнитивного, понятийного, метакогнитивного и интенционального опыта определяют *продуктивные свойства* индивидуального интеллекта (в терминах показателей интеллектуальных способностей – когнитивных, понятийных, метакогнитивных, креативных) и *стилевые свойства* индивидуального интеллекта (в терминах показателей познавательных стилей – стилей кодирования информации, стилей переработки информации, стилей мышления и эпистемологических стилей). В свою очередь, продуктивные и стилевые свойства интеллекта – по мере его формирования – выступают в качестве основы интегральных интеллектуальных способностей – компетентности, таланта и мудрости как форм интеллектуальной одаренности.

Отождествляя интеллект с особенностями организации индивидуального ментального (умственного) опыта, можно сказать, что любой ученик «заполнен» своим собственным ментальным опытом, который и предопределяет характер его интеллектуальной активности в тех или иных конкретных ситуациях. Состав и строение этого опыта у каждого ученика различны, поэтому дети, безусловно, различаются по своим интеллектуальным возможностям («каждый человек умен на свой лад»). Однако все они объективно нуждаются в создании условий, содействующих их интеллектуальному росту за счет максимально возможного обогащения индивидуального ментального опыта.

Соответственно решение задачи интеллектуального воспитания учащихся (следовательно, формирования индивидуальных интеллектуальных ресурсов) предполагает:

1) создание условий для актуализации наличного индивидуального ментального опыта каждого ученика – элементов архетипических знаний, например, в виде «чувства числа»; предпочитаемых способов кодирования информации; имеющихся декларативных и процедурных когнитивных схем; ранее сформированных житейских и научных понятий; приемов интеллектуальной саморегуляции; индивидуальных познавательных склонностей и т. д.;
2) создание условий для обогащения индивидуального ментального опыта этого ученика – выработка умения использовать разные способы кодирования информации в режиме их взаимоперевода; расширение набора декларативных и процедурных когнитивных схем и рост их гибкости; дифференциация и интеграция вербальных и невербальных семантических структур; формирование системы категорий разной степени обобщенности; создание условий для концептуальной (порождающей) деятельности в виде выдвижения гипотез, обсуждения и интерпретации; развитие способности осуществлять непроизвольный и произвольный контроль своей интеллектуальной деятельности; формирование открытой познавательной позиции и высокого уровня метакогнитивной осведомленности; освоение широкого репертуара различных познавательных стилей.

1.3. Основные линии обогащения ментального (умственного) опыта в процессе обучения

Выделим основные линии обогащения ментального (умственного) опыта учащихся в процессе обучения:

- *линия обогащения когнитивного опыта* (актуализация разных **способов кодирования информации** – словесно-символического, визуального, предметно-практического, сенсорно-эмоционального; формирование **когнитивных схем** понятий и способов интеллектуальной деятельности, в том числе формирование мыслительных операций с такими свойствами, как системность, обратимость, осознанность);
- *линия обогащения понятийного опыта* (работа с **семантикой** научного языка, включая расширение семантических полей изучаемых научных понятий; выделение **существенных признаков** понятий и формирование **связей между понятиями разной степени обобщенности**; учет основных **фаз процесса образования понятий**, таких как мотивация, категоризация, обогащение, перенос, свертывание; самостоятельное **конструирование понятий** с опорой на процедуры интерпретации и моделирования);
- *линия обогащения метакогнитивного опыта* (развитие **непроизвольного и произвольного контроля** интеллектуальной деятельности – способности планировать, оценивать, прогнозировать, работать с ошибками и т. д.; повышение уровня **метакогнитивной осведомленности** – представлений о том, как устроены научные знания, каковы особенности разных способов интеллектуальной деятельности, что является слабой и сильной стороной собственного интеллекта; формирование **открытой познавательной позиции** – готовности воспринимать «невозможную» информацию, принимать альтернативную точку зрения, правильно реагировать на противоречия и т. д.);
- *линия обогащения интенционального* (*эмоционально-оценочного*) *опыта* (возможность **выбора** способа изучения учебного материала; опора на **личный опыт** ученика; актуализация **интуитивного опыта** – поощрение к высказыванию сомнений, догадок, убеждений, «опережающих» идей, эмоциональных оценок; использование элементов **игры**; формирование **ценностного отношения** к учебному материалу).

Рассмотрим более подробно основные линии обогащения разных форм ментального опыта в процессе обучения, включая те основные учебные действия, которые являются средством формирования основных компонентов ментального опыта.

1.3.1. Обогащение когнитивного опыта учащихся

Архетипические структуры

Архетипические структуры – это такие формы когнитивного опыта, которые передаются субъекту по линии генетического и/или культурного наследования и характеризуют некоторые связанные с образом жизни человека как родового существа универсальные эффекты переработки информации. Большинство детей при обучении счету (в дальнейшем – при изучении разных систем счислений) используют пальцы рук, практически всем свойственно особое тревожное восприятие ночи (темноты), почти для каждого круг воспринимается как символ добра и покоя и т. п.

В области обучения математике выделен такой элемент архетипического опыта, как «чувство числа» («number sense») (Dehaene, 1997; Halberda et al., 2008; Тихомирова, Ковас, 2012; и др.). Под чувством числа понимается способность к восприятию некоторого количества объектов, не прибегая к счету этих объектов, и умение оперировать этим количеством. Выделяются различные аспекты чувства числа, такие как, например, соотнесение некоторого количества объектов с их символическим выражением, установление точной позиции числа на числовой линии и др. При взгляде на два набора объектов «чувство числа» позволяет совсем маленьким детям определить, в каком наборе предметов больше, без словесного подсчета или использования арабских цифр. «Чувство числа», появляющееся уже в младенческом возрасте, является основой для более высокого уровня понимания математики при ее дальнейшем изучении.

В процессе обучения учащиеся должны прибрести опыт использования разных **способов кодирования информации**. Способы кодирования информации – это субъективные средства, с помощью которых человек представляет (отображает) в своем опыте окружающий мир и перерабатывает информацию о происходящем. Работа интеллекта предполагает четыре основных способа кодирования информации: словесно-символический (с помощью слова, знака, символа), визуальный (с помощью образа), предметно-практический (с помощью действия), сенсорно-эмоциональный (с помощью сенсорных впечатлений и эмоциональных переживаний).

Овладению *словесно-символическим способом кодирования информации* способствуют следующие учебные действия:

- использование и сравнение словесно-символических форм описания различных объектов (понятий);
- самостоятельный поиск учащимися словесных формулировок определений, правил, закономерностей;
- перевод информации с родного языка на язык определенной научной дисциплины и, наоборот, с языка научных терминов на родной язык;
- работа со справочниками, словарями.

Визуальный способ кодирования информации учащиеся осваивают с помощью таких учебных действий:

- анализ нормативных образов (общепринятых визуальных моделей научных понятий), в том числе выделение их существенных характеристик;
- развитие образа в ходе рассуждения (преобразование наглядного или мысленного образа, вычленение его отдельных элементов, перестройка исходного образа в соответствии с требованиями задачи и т. д.);
- самостоятельное создание индивидуальных визуальных моделей тех или иных математических объектов.

Предметно-практический способ кодирования информации представлен следующими учебными действиями:

- выполнение определенных предметных действий в ходе лабораторных работ;
- анализ практических ситуаций, обеспечивающих подключение житейских впечатлений учащихся (особенно на этапе мотивировки введения нового понятия).

Сенсорно-эмоциональный способ кодирования информации развивается благодаря таким учебным действиям:

- постановка вопросов, стимулирующих эмоциональную оценку изучаемого материала (Какое из заданий мне понравилось?

Почему? Какой способ решения показался слишком громоздким? и т. д.);
- использование метафор, привлекаемых из культурного контекста и личного опыта;
- поиск решений в невозможных («волшебных») ситуациях, в которых ученик может дать волю воображению и фантазии.

Особое внимание должно уделяться отработке умения одновременно использовать разные способы кодирования информации и осуществлять обратимые переводы информации с одного способа кодирования на другой.

Когнитивные схемы – это обобщенные и стереотипизированные формы хранения прошлого опыта относительно объектов и их свойств (декларативные схемы), а также последовательности действий (процедурные схемы).

Формированию когнитивных схем способствуют следующие учебные действия:

- работа с фокус-примерами, в которых в яркой форме воспроизводятся типичные и в то же время существенные свойства понятия в виде схематизированного образа или знаковой конструкции;
- освоение процедур опознания объектов, а также алгоритмов действий (отработка отдельных шагов алгоритма, изучение и самостоятельное построение различных алгоритмов решения тех или иных проблем);
- перестройка когнитивных схем в направлении развития их динамичности и структурированности.

В данном случае речь идет не об иллюстративном материале, а о материале, способствующем развитию способности к визуализации научного знания (в частности, за счет использования различных визуальных моделей), а также о включении процессов словесно-образного перевода как базового механизма мышления (Веккер, 1976).

1.3.2. Обогащение понятийного опыта учащихся

Следует различать понятийные структуры (концепты) и понятия. *Понятийные структуры* (*концепты*) – это ментальные образования «внутри» индивидуального понятийного опыта, референтные определенным элементам символической системы (прежде всего словесным знакам) и выступающие в качестве психического носителя понятия. *Понятие* – это единица знания, которая существует независимо от познающего субъекта в некотором объективированном виде (как элемент «третьего мира», по К. Попперу) и которую он может воспроизвести в своем индивидуальном ментальном опыте. По отношению к ребенку либо взрослому человеку слово (знак, символ) является сигналом для актуализации понятийной структуры, которая определяет уровень понимания содержания слова – и тогда мы говорим, что у человека о данном предмете либо отсутствует «понятие», либо «понятие» сформировано недостаточно, либо имеется «правильное понятие», либо складывается «новое понятие».

Таким образом с психологической точки зрения образование понятий – это сложный и длительный процесс превращения определенных единиц объективно существующего знания в субъективные ментальные структуры, существующие уже «внутри» понятийного опыта ученика в качестве психических новообразований (Веккер, 1976; Холодная, 2012). Следовательно, овладеть понятием путем информирования и простого заучивания невозможно. Необходимо постепенное выстраивание индивидуального понятийного опыта ученика как психического носителя понятийного знания и предпосылки развития понятийного мышления. В свою очередь, сформировавшись, понятийное мышление начинает оказывать мощное воздействие на эффективность остальных познавательных процессов (внимания, памяти, воображения и т. д.). Именно степень сформированности понятийного мышления, согласно исследованиям Л. А. Ясюковой, является основной характеристикой, влияющей на качество школьных навыков и уровень успеваемости (Ясюкова, 2005).

Обогащение понятийного опыта учащихся предполагает формирование его базовых компонентов, а именно семантических, категориальных и концептуальных структур.

Формированию *семантических структур,* то есть системы значений («семантических полей») научных терминов, способствуют учебные действия, которые:

- ориентируют на анализ значения термина, в том числе его этимологии;
- показывает историю возникновения терминов, раскрывают их культурно-исторический контекст;

– связывают новые термины с предметной областью их использования.

Формирование *категориальных структур,* отвечающих за использование категорий разной степени обобщенности и образование связей в системе понятий, способствуют следующие учебные действия:

– работа с признаками понятий (выявление множества возможных признаков изучаемого понятия, их дифференциация, соотнесение различных признаков по степени их значимости, выделение существенных признаков и понимание того, что существенность или несущественность признака может меняться в зависимости от контекста и цели деятельности);
– включение отдельного понятия в систему связей (родо-видовых, генетических, причинно-следственных, межпредметных) с другими понятиями, образование своего рода «пирамиды» понятий с разной мерой общности;
– освоение мыслительных операций, таких как анализ, синтез, сравнение, обобщение, абстрагирование, при этом субъективной мерой овладения мыслительными операциями являются такие их качества, как системность, рефлексивность, обратимость, гибкость (Ксенева, 2004).

Полноценное формирование категориальных структур предполагает учет *основных фаз образования понятия,* таких как мотивировка, категоризация, обогащение, перенос, свертывание.

1) *мотивировка* – создание условий для осознания учащимися необходимости нового способа описания своего предыдущего опыта (житейского, физического, арифметического, алгебраического), например, за счет создания эффекта «невозможности» разрешения ситуации в силу отсутствия на данный момент адекватных понятийных средств ее анализа;
2) *категоризация* – введение знаково-символического и визуального обозначения понятия с последующим постепенным увеличением степени обобщенности знаково-символической и визуальной форм представления его содержания, а также ориентация учащихся на выделение отличительных частных и общих (несущественных и существенных) признаков соответствующего понятия;
3) *обогащение* – накопление и дифференциация опыта оперирования вводимым понятием, расширение возможных ракур-

сов осмысления его содержания (за счет использования разных вариантов его анализа, увеличения числа варьирующихся по степени существенности признаков, наращивания межпонятийных связей и т. д.);
4) *перенос* – применение усваиваемого понятия в разных ситуациях;
5) *свертывание* – экстренная реорганизация всего множества имеющихся у ученика сведений относительно данного понятия и превращение их в обобщенную единицу знания. Иными словами, развернутый на предыдущих фазах субъективный образ понятия на этой фазе должен быть представлен в сжатой, концентрированной форме, что может обеспечиваться такими приемами, как создание «безвыходных» ситуаций; работа с открытыми заданиями типа «Составь рекламу для...»; использование яркого фокус-примера; введение жесткого ограничения времени на выполнение определенных заданий; специально составленный список вопросов и т. д.

Формирование *концептуальных структур,* связанных с эффектами свертывания категориальных структур и обеспечивающих выявление скрытых закономерностей и порождение новых ментальных содержаний, требует выполнения следующих учебных действий:

- самостоятельный поиск, выявление и формулировка зависимостей, аналогий, выводов, закономерностей;
- создание объяснительного (устного либо письменного) текста, авторских текстов по определенной теме школьного курса;
- интерпретация проблемной (учебной) ситуации с использованием альтернативных вариантов ее возможного осмысления;
- моделирование, предполагающее мысленное построение и изучение реальных явлений и ситуаций с целью их объяснения;
- проведение мысленного эксперимента, заключающегося в проверке имеющегося или получении нового знания «в уме» путем конструирования идеальных (предполагаемых) объектов и манипулирования ими в воображаемой ситуации.

Образование концептуальных структур, по сути, завершает процесс «кристаллизации» понятийного опыта относительно определенного понятия. Этот уровень организации понятийного опыта мы склонны считать основой компетентности как проявления уровня интеллектуального развития личности. Отметим, что аналогичной точки зрения придерживался В. А. Крутецкий, рассматривающий эффект «свертывания» как ключевой признак математических способностей (Крутецкий, 1968). Аналогично Дж. Уолтерс и Х. Гарднер объясняют экстраординарные интеллектуальные достижения личности эффектом «кристаллизации» индивидуального опыта (Walters, Gardner, 1986).

1.3.3. Обогащение метакогнитивного опыта учащихся

Метакогнитивный опыт – это ментальные структуры, обеспечивающие управление собственной интеллектуальной деятельностью. Компоненты метакогнитивного опыта: *непроизвольный и произвольный интеллектуальный контроль, метакогнитивная осведомленность, открытая познавательная позиция*.

Интеллектуальный контроль предполагает способность к непроизвольной и произвольной саморегуляции своей интеллектуальной деятельности. Такой опыт учащиеся приобретают, осваивая следующие учебные действия:

- выдвигать и формулировать цели собственной деятельности, продумывать средства их реализации;
- осознанно выстраивать последовательность собственных действий;
- работать в условиях, когда информация недостаточна либо избыточна;
- действовать по предложенному плану; сравнивать различные планы решения одной и той же задачи; выбирать, обосновывая, тот или иной план решения; составлять собственный план деятельности;
- осуществлять предварительный мысленный просмотр и анализ проблемы до принятия решения (в том числе умение мысленно сказать себе «Стоп!»);
- предсказывать и прогнозировать последствия принимаемых решений, а также возможных изменений в проблемной ситуации;
- оценивать свои отдельные действия и результат своей интеллектуальной работы, проводить самооценку успешности в изучении учебного материала;

– выявлять собственные ошибки, выяснять их причины, предупреждать появление ошибок;
– выбирать стратегию самообучения, а также изменять ее под влиянием новых требований и с учетом своих интеллектуальных возможностей.

Метакогнитивная осведомленность – система представлений о своих собственных качествах ума и способах их эффективного использования, а также о том, как устроены научные знания и как организована интеллектуальная деятельность.

Интеллектуальное воспитание ученика предполагает не только усвоение знаний «о том, что» и знаний «о том, как», но и знаний «о том, какой Я». Этот тип информации не представлен в традиционных учебниках, хотя знание собственных интеллектуальных особенностей (сильных и слабых сторон своего ума) является мощным стимулом развития индивидуальных интеллектуальных сил.

Формирование метакогнитивной осведомленности могут обеспечивать следующие учебные действия:

– рефлексия (осознание) способов собственной учебной деятельности, в том числе анализ, сравнение и обоснование используемых операций, приемов и методов решения задач;
– самооценка своих знаний и умений, включая свое отношение к разным видам учебных заданий;
– учебная самодиагностика с целью самопроверки особенностей усвоения конкретного учебного материала и последующего осознанного выбора своих дальнейших действий;
– работа с психологической информацией в рамках специальных разделов в учебных книгах и практикумах под названием «Психологические комментарии».

Открытая познавательная позиция – готовность воспринимать необычную, парадоксальную, «невозможную» информацию, размышлять в режиме вариативного анализа происходящего.

Формированию открытой познавательной позиции способствуют следующие учебные действия:

– использовать разные, в том числе альтернативные подходы к одной и той же учебной проблеме;
– искать несколько вариантов решения одной и той же задачи;
– решать проблемы в условиях наличия противоречия;
– обсуждать необычные идеи;

– определять перспективы в изучении той или иной темы;
– уметь отстаивать свою точку зрения, принимать и уважать чужое мнение.

1.3.4. Обогащение интенционального (эмоционально-оценочного) опыта

Интенциональный опыт – это ментальные структуры, предопределяющие избирательность индивидуальной интеллектуальной деятельности. Компоненты интенционального опыта: *интеллектуальные предпочтения, убеждения, умонастроения.*

Особое внимание должно уделяться актуализации интуитивного опыта учеников. По этому поводу Д. Пойа пишет: «Позвольте мне порекомендовать вам одну небольшую хитрость. Прежде чем учащиеся приступят к работе, предложите им угадать результат или даже только какую-то его часть. Учащийся, высказавший определенную гипотезу, связывает себя этим; его престиж и чувство собственного достоинства в какой-то степени зависят теперь от исхода дела, и ему не терпится узнать, окажется ли его догадка правильной или нет, – он будет активно заинтересован...» (Пойа, 1970, с. 293–294).

Важным условием актуализации интенционального опыта является опора на личный (обыденный) опыт ученика. Одна из задач учителя – извлечь из учеников их собственную «конструкцию понятий», обеспечивая тем самым связь между понятийными знаниями ученика и его личным опытом, в том числе «наивной» формой мышления.

Не менее значима апелляция к эстетическим переживаниям учащихся. По словам А. Пуанкаре, эстетическое чувство в математике играет роль своего рода тонкого решета, через которое просеиваются различные комбинации идей, поскольку наиболее полезные комбинации оказываются математически наиболее красивыми (Пуанкаре, 1910).

Одним из ведущим факторов актуализации и обогащения интенционального опыта учащихся является игра. Часто приходится слышать утверждение о том, что игра – это ведущий вид деятельности в дошкольном возрасте, тогда как в школьном возрасте в этом качестве выступает учеба (в терминах этой логики у взрослых может быть только один ведущий вид деятельности – труд). Однако в современной психологии принято считать, что игра – это деятельность, которая сопровождает человека на всех этапах его возрастного развития (Берн, 1986). Игра – важный аспект развития культуры и человеческой природы в целом (Хейзинга, 1997), поэтому, играя, человек любого возраста обогащает арсенал способов культурного поведения, причем в соответствии со своими личными предпочтениями и склонностями.

Очень интересно трактуется роль игры применительно к такой области знания, как математика. Некоторые авторы напрямую связывают мотивы игры и математическую деятельность. Так, высказывается мнение, что стремление человека играть является одним из источников математики (Петер, 1968). Действительно, многие достижения математики – это продукт игры воображения либо интеллектуальной игры, связанной с конструированием и исследованием возможных миров.

Что касается учебной деятельности, то игровой подход – это неотъемлемый элемент психодидактики школьного обучения. По словам Л. С. Выготского, «едва ли не самым драгоценным орудием воспитания интеллекта является детская игра» (Выготский, 1991, с. 123). Игровые элементы обеспечивают активизацию эмоциональной составляющей учебной деятельности; повышают интерес и увлеченность процессом учения; в качестве психологических «пауз» компенсируют информационные перегрузки; снимают познавательные барьеры и психологические защиты (Эльконин, 1999; Кларин, 1985; Зинченко, 2000; и др.). Таким образом, игра является необходимым элементом продуктивного обучения.

Формирование основных компонентов интенционального (эмоционально-оценочного опыта) осуществляется средствами следующих учебных действий:

1) высказывать догадки и «опережающие» идеи;
2) формулировать свое эмоциональное отношение к учебному материалу (в рамках эссе, сочинения и т. д.);
3) обсуждать примеры из своего личного опыта при анализе научных понятий (особенно это важно на этапе, предшествующем введению нового понятия);
4) работать с учебными материалами с сюжетным содержанием, поскольку сюжет, будучи непосредственно адресованным личному житейскому опыту ученика, способствует актуализации его индивидуальных познавательных предпочтений;
5) участвовать в дидактических играх: играх с жесткими правилами (лото, работа с шифровками), ролевых играх (драмати-

зации, аукционы, маскарады), развивающих играх (психологические игры-упражнения), интеллектуальных играх (поиск решения в «невозможной ситуации», мысленный эксперимент);
6) выбирать учебный материал разного типа и разной степени сложности, способ его изучения, форму контроля в соответствии с индивидуальным познавательным стилем.

Возникает ключевой вопрос: с помощью каких средств в процессе обучения можно реализовать все те виды учебных действий, с помощью которых обеспечивается адресное обогащение разных форм ментального опыта ученика и, как следствие, его интеллектуальное воспитание?

На наш взгляд, главную роль в решении этого вопроса играет *содержание современного школьного образования,* в том числе качественно новые учебные материалы, отвечающие требованиям психодидактического подхода и обеспечивающие формирование интеллектуальных ресурсов каждого ученика. Единицей содержания школьного образования является *учебный текст,* который организует взаимодействие ученика с предметным содержанием учебных курсов. Следовательно, необходимо говорить о специально сконструированных учебных текстах, которые могут выступать в качестве средства управления интеллектуальным ростом учащихся.

ГЛАВА 2

Развивающие учебные тексты как фактор формирования интеллектуальных ресурсов личности

2.1. Роль текста в интеллектуальном развитии личности

Текст является ценнейшим элементом культуры. Текст – это та естественная среда, в которой осуществляется интеллектуальное развитие человека на протяжении всей его жизни («текст» в широком значении слова – это сообщение, которое человек должен прочитать и проинтерпретировать, включая житейские ситуации, явления природы, поведение других людей). По словам М. Бахтина, «человек в его человеческой специфике всегда выражает себя (говорит), то есть создает текст» (Бахтин, 2000, с. 304).

Этимология слова «текст» восходит к латинским *textum* (ткань), *textus* (сплетение, структура, связное изложение), *texo* (ткать, сплетать, сочетать, сочинять) (Руднев, 2001). То есть понимание и тем более создание текста – это сложная интеллектуальная деятельность, требующая высокого уровня интеллектуального мастерства.

В самом общем виде определение текста выглядит следующим образом: текст (от *лат.* ткань, сплетение, соединение) – это последовательность слов, предложений, построенная согласно правилам данного языка, данной знаковой системы и образующая сообщение. В лингвистическом словаре текст определяется так: текст – это объединенная смысловой связью последовательность знаковых единиц, основными свойствами которой являются связность и цельность (Лингвистический энциклопедический словарь, 1990). Отметим, что в семиотике текст понимается в широком значении как осмысленная последовательность любых знаков (словесных, символических, визуальных, звуковых, ситуационных), любая форма коммуникации (танец, ритуал). Общий признак любого типа текста заключается в том, что текст – это средство передачи определенных сведений или, шире, средство обмена определенной информацией (то есть это всегда некоторое «послание»).

Минимальная протяженность текста до сих пор является дискуссионным вопросом, хотя принято считать, что текстом может быть одна коммуникативная реплика.

И. Я. Лернер предлагает называть текстом «письменную, устную или актуализированную мышлением совокупность взаимосвязанных высказываний или отдельное высказывание, воплощающих определенное содержание» (Лернер, 1992, с. 91). Всякий текст не только несет в себе информацию о части действительности, но и отражает – прямо или скрыто – тот творческий процесс, который сопутствовал добыванию заключенной в тексте информации и способов ее применения, а также потребности и мотивы, которые вызвали к жизни содержание текста (Лернер, 1992).

Ж. Деррида, в свою очередь, отождествляет окружающий нас мир с текстом («ничто не существует вне текста») и утверждает его познаваемость только как текста (Деррида, 2000).

Иными словами, текст – это связная последовательность знаков или образов, выражающая определенное содержание, которое может быть проинтерпретировано (осмыслено) читателем. Важно подчеркнуть, что на любом уровне понимания работа с текстом предполагает перевод содержания текста на язык ментального опыта читателя.

Об особой роли текста в интеллектуальном развитии личности говорят многие специалисты. Так, В. В. Иванов полагает возможным определить понятие «интеллект» через понятие «текст», выделяя следующие функции интеллекта: 1) передача имеющейся информации (текстов); 2) создание новой информации, то есть создание текстов, не выводимых однозначно по заданным алгоритмам из уже имеющихся, а обладающих определенной степенью непредсказуемости; 3) память (способность хранить и воспроизводить информацию (тексты) (Иванов, 1986). Тексты, таким образом, являются своего рода «мыслящими структурами», поскольку они удовлетворяют сформулированным выше признакам интеллекта. «Ведь и абсолютно нормальный человеческий интеллект, если он от рождения полностью изолирован от поступления текстов извне и какого-либо диалога, остается нормальной, но не запущенной в работу машиной. Сам собой он включиться не может. Для функционирования интеллекта требуется другой интеллект... Интеллект – всегда собеседник» (там же, с. 3).

М. М. Бахтин отмечал, что подлинная сущность художественного текста раскрывается на рубеже двух сознаний. «Это всегда встреча двух текстов – готового, авторского и реагирующего, вновь создаваемого, читательского» (Бахтин, 1976, с. 127). Иными словами, при восприятии и интерпретации текста всякий раз осуществляется встречное порождение текста, то есть инициируется достаточно сложная интеллектуальная деятельность читателя. Сказанное, на наш взгляд, верно по отношению и к научным, и к учебным текстам.

Можно согласиться с утверждением И. Я. Лернера о том, что «невоспитанность учащихся как читателей (слушателей, сотворцов, авторов устного или письменного текста) сказывается на полноценности интеллектуального потенциала страны. Неумение думать над текстами с детства закрепляет стереотипное мышление...» (Лернер, 1992, с. 83).

Как отмечает Л. Э. Генденштейн, главное, чему мы должны учить в школе, – это способность думать, сопоставлять, анализировать, ставить вопросы. Соответственно он выделяет две основные цели современного учебника: воспитание интереса и воспитание научного мышления (Генденштейн, 1988). В частности, учебный текст должен быть построен как модель «приключения мысли». Это означает, что учебник должен быть настолько интересным, чтобы ученик им зачитывался, а для этого надо погрузить его «в атмосферу совместного поиска, совместных размышлений... Надо все изложение построить так, чтобы читатель, пусть с помощью автора, *сам совершил открытие*» (там же, с. 115).

В. Е. Чернявская, называя текст «механизмом, „запускающим“ когнитивные процессы восприятия и декодирования», рассматривает текст и как результат, и как процесс текстопорождения, то есть взаимодействие с текстом инициирует активную интеллектуальную деятельность читателя (Чернявская, 2005). Согласно А. А. Брудному, понимание текста – это достаточно сложная интеллектуальная работа, предполагающая три вида умственных действий, таких как «монтаж» (движение «вдоль» текста), «перецентровка» (мысленное, часто скачкообразное перемещение от одного элемента текста к другому), «формирование концепта текста» (построение концептуальной модели текста, прежде всего на основе его интерпретации) (Брудный, 1998). Именно поэтому Брудный называет текст механизмом, который управляет процессом понимания.

При анализе функций текста необходимо обратиться к понятию «открытый текст», введенному У. Эко (Эко, 2005). Открытый текст – это текст, позволяющий осуществить множество смысловых интерпретаций. В понимании У. Эко, открытый текст вовсе не предполагает произвольного толкования, читатель должен извлечь тот его смысл, который был задуман автором (то есть текст имеет некоторое объективное значение). Тем не менее автор конструирует текст так, чтобы он задавал несколько сосуществующих вариантов понимания текста. Иными словами, открытый текст является многоуровневым и потенциально содержащим несколько вариантов прочтения. Напротив, «закрытый» текст – это статический набор императивных сведений с линейной структурой их изложения, исключающих необходимость интерпретации в силу ясности и очевидности наличного содержания. Типичным примером «закрытого» текста является традиционный учебник математики, интенции авторов которого обычно сводятся к тому, что если в учебнике слишком много рассуждений, если ученик читает текст не по порядку, если он интерпретирует понятия каким-либо альтернативным способом, то он не способен усвоить научное математическое знание.

Тем не менее следует подчеркнуть, что текст может иметь одновременно как открытые, так и закрытые фрагменты (в первую очередь эта особенность относится к учебному тексту).

Таким образом, отнюдь не любой текст способен выступить в качестве фактора интеллектуального воспитания. Для этого требуется не только содержательное и структурное усовершенствование учебного текста, но и реализация качественно нового, – психодидактического, – подхода к основам его конструирования. Основным инструментом организации учебных текстов, а также взаимодействия ученика-читателя с содержанием этих текстов является школьный учебник. О функциях школьного учебника нового поколения мы поговорим ниже.

2.2. Функции современного школьного учебника (учебно-методического комплекта)

Какова роль учебника в учебном процессе? На этот счет существуют разные точки зрения (рассмотрим их на примере учебника математики). Согласно одной из них, назначение учебника математики – это строгое и последовательное изложение исторически сложившегося математического знания с его адаптацией к возрастным возможностям учащихся, по своей форме такой учебник выступает как справочник и задачник. Согласно другой, учебник играет сугубо вспомогательную роль, так как подготовка материала и его изложение на уроке полностью возлагаются на учителя, который организует учебную деятельность школьников и отвечает за качество усвоения ими математических знаний.

В ряде исследований отмечается, что существующие школьные учебники являются слишком «закрытыми», поскольку ограничивают деятельность учащихся очень узкими рамками (Love, Pimm, 1996). Также подчеркивается, что большинство учеников не могут эффективно использовать учебник в качестве средства обучения (Weinberg, Wiesner, 2011).

Мы придерживаемся следующих позиций: во-первых, учебник должен быть построен не как справочник/задачник, а как обучающая книга для ученика, ибо знание будет обладать развивающим эффектом только в том случае, если оно сконструировано с учетом закономерностей психического (интеллектуального и личностного) развития учащихся; во-вторых, работа учеников с учебными текстами (их анализ, выделение основных идей, интерпретация, порождение авторских текстов и т. д.) – это мощный ресурс интеллектуального развития, игнорируя который, мы лишаем учащихся возможности индивидуальной, «тихой», интеллектуальной работы.

Основные функции современного учебника как психодидактической системы ранее были нами проанализированы на примере школьного учебника математики (Гельфман, Холодная, 2006): 1) информативная; 2) управляющая; 3) развивающая; 4) коммуникативная; 5) воспитательная; 6) дифференциации обучения; 7) индивидуализации обучения.

Однако в современных условиях правильнее говорить об учебно-методическом комплекте (УМК) как психодидактической системе, включающей учебник как ее «ядро» и остальные учебные материалы (учебные книги, практикумы, рабочие тетради, компьютерные программы) как ее периферию. Именно УМК обеспечивает то содержательное пространство, в которое могут быть «встроены» учебные тексты самого разного типа и которое позволит в полном объеме реализовать функции учебных материалов нового поколения.

Выделим наиболее важные аспекты функций УМК как психодидактической системы, обеспечивающей интеллектуальное и личностное развитие учащихся. Каждая функция УМК (в том числе школьного учебника как его ведущего элемента) может быть раскрыта через ряд требований к учебным текстам в рамках соответствующего учебного предмета.

I. **Информативная функция**

1) *Передача знаний разного типа,* включая декларативные, процедурные, метакогнитивные, ценностно-смысловые знания.

   Декларативные знания (знания о том, «*что*» и «*почему*») – это сведения об объектах и событиях, их свойствах, связях, причинах происходящих явлений в соответствующей предметной области (физике, биологии, математике и т. д.). Декларативные знания представлены в виде описаний, сообщений, суждений, утверждений и обычно начинаются со слов «Я знаю, что...». Декларативное знание относят к знаниям теоретического типа, поскольку с их помощью мы можем опознавать, классифицировать и объяснять происходящее. Этот тип знаний человек хорошо осознает и может рассказать о них другим людям.

   Процедурные знания (знания о том, «*как*») – это сведения о способах деятельности, о том, как именно нужно действовать в конкретной ситуации. Процедурные знания представлены в виде инструкций, программ, алгоритмов, приемов и методов решения задач. Процедурные знания обычно начинаются со слов «Я знаю, как...». Процедурные знания относят к знаниям практического типа, поскольку они позволяют успешно действовать в конкретной ситуации. Знания этого типа с трудом осознаются, их усвоение осуществляется только через собственный опыт человека в ходе длительной целенаправленной практики.

   Метакогнитивные знания (знания о знаниях и способах мышления) – это знания о своих индивидуальных интеллектуальных качествах и состоянии собственных знаний, а также об устройстве научного знания и способах его получения.

   Ценностно-смысловые знания (оценочные знания) – это сведения об отношении человека к определенным фактам, явлениям, действиям, умозаключениям. Ценностные знания выражаются в виде оценочных суждений с использованием таких слов, как важный/бесполезный, рациональный/нерациональный, изящный/громоздкий, любопытный/неинтересный и т. д. Например, «Я знаю, какое важное значение имела сформулированная в свое время теорема Пифагора для развития математики». Ценностные знания можно отнести к категории «личностного знания» (Полани, 1985) или «неявного знания» (Стернберг, 2002), поскольку они формируются на основе индивидуального познавательного, в том числе эмоционально-оценочного опыта.

2) *Форма систематизации* информации. В учебнике (или УМК) могут быть представлены разные принципы систематизации учебного материала: линейный (предыдущий компонент учебного текста является основой последующего компонента), структурный (вокруг основной содержательной идеи группируется второстепенная, дополнительная информация) и целевой (разнородный материал интегрируется на основе некоторой проблемной области). Также можно говорить о тематическом принципе систематизации учебного материала, позволяющем реализовать эффект погружения в соответствующий учебный материал.
3) *Мера доступности* учебного текста. Учебный текст, неся в себе всю совокупность современных представлений о соответствующей области научных знаний, в то же время по форме и содержанию должен быть сконструирован таким образом, чтобы с ним мог работать «новичок» (ученик определенного возраста).

   Психологически оправданным является такой тип доступности учебного материала, усвоение которого предполагает приложение некоторых усилий со стороны учащихся, то есть требует мобилизации не только наличных сил, но и тех ресурсов, которые лежат в «зоне ближайшего развития» учащихся.

   Традиционные учебники часто создают вредную иллюзию «полного знания». Напротив, автор должен сознательно стремиться к тому, чтобы учебные тексты порождали у учеников «ощущение неполноты», а сам учебник создавал потребность больше узнать о том, что еще неизвестно либо непонятно.
4) *Соотношение свернутости–развернутости* учебных текстов. В рамках традиционной точки зрения доминирует представление о том, что школьный учебник должен быть кратким, лаконичным, без каких-либо лишних, «отвлекающих» отступлений. Установка на минимизацию объема учебника, в свою очередь, обусловливает перечислительно-определительный стиль учебного текста. Безусловно, учебные тексты должны содержать стройное, последовательное и безошибочное изложение сложившейся системы знаний, однако из этого вовсе

не следует необходимость превращать учебный текст в «экспресс-информацию».

Более того, по ряду оснований именно «сжатые» учебные тексты психологически менее оправданны. Во-первых, по мере сокращения текста может нарастать его сложность, следовательно, свернутые тексты более трудны для понимания. Во-вторых, учебные тексты должны показывать процесс рождения знания, а не только демонстрировать готовое, кем-то уже найденное и сформулированное знание. В-третьих, учебник, чтобы быть интересным, не должен состоять сплошь из обязательного материала, ибо только наличие дополнительных материалов обеспечивает ученику возможность выбора текстов разного типа.

Иными словами, современный учебный текст должен быть организован таким образом, чтобы у учащихся формировалась готовность «развернуть» при необходимости «свернутые» определения и правила, например, за счет рекомендаций типа «обоснуйте подробнее; объясните, почему»; вопросов к читателю и т. п.

II. **Управляющая функция**

1) *Наличие инструктивной информации* в виде рекомендаций по управлению чтением; специальных знаков, которые дают возможность учащимся выделить познавательные функции текстов: «Обратите внимание», «Вопрос–ответ», «Подведем итоги»; средств навигации по другим элементам учебно-методического комплекта и т. п.
2) *Организация повторения* ранее освоенных знаний, умений и навыков. В традиционном учебнике организация повторения представлена, как правило, в виде введения особого раздела типа «Давайте повторим». На наш взгляд, наиболее эффективным является «обогащающее повторение», при котором учебный текст сконструирован таким образом, что прошлые знания при их повторении включаются в процесс изучения нового материала (Пустынникова, Лизура, Сазанова, 2004).
3) *Создание условий для исследовательской деятельности* учащихся за счет использования проблемной формы изложения учебного материала, организации творческого чтения текста, предоставления учащимся специально подобранных материалов для исследования (в зависимости от специфики учебного предмета), включения серии вопросов, которые нацеливают

учащихся на имитацию работы исследователя, и проектных заданий.

4) *Использование средств стимулирования учащихся к самостоятельной работе.* Учебный текст должен ориентировать учащихся на самостоятельное изучение отдельных вопросов без объяснения учителя на уроках. Подчеркивается важность включения в учебные тексты информации, помогающей самообразованию (в виде пояснений, указаний, комментариев, смысловых таблиц и других приемов организации текста, облегчающих самостоятельную работу над текстом) (Якиманская, 1996).
5) *Включение элементов текущей диагностики и самодиагностики* усвоения учебного материала с тем, чтобы функции контроля постепенно передавались самому ученику.

III. **Развивающая функция**

1) *Учет психологических закономерностей процесса образования понятий* (привлечение разных способов презентации понятия, формирование его когнитивной схемы, выделение существенных признаков, установление внутрипредметных и межпредметных связей между понятиями). Особое значение имеют тексты, приглашающие учеников к самостоятельному созданию авторских текстов. В частности, Н. А. Кузнецова отмечает необходимость таких приемов организации текста, которые направляют учащихся на создание «встречных» текстов на четырех уровнях («перевод», «комментарий», «интерпретация», «методологический текст») (Кузнецова, 1998).
2) *Развитие способности рассуждать, обосновывать, доказывать.* Преобладающий в большинстве учебников информационно-иллюстративный способ изложения учебного материала не отвечает данному требованию. Для этого необходим «проблемно-рассуждающий» тип изложения учебного материала (Донской, 1985). Можно выделить следующие отличительные особенности проблемно-рассуждающего способа изложения: во-первых, наличие в тексте проблемной ситуации с выделением того противоречия, которое не может быть разрешено на основе прошлых знаний; во-вторых, включение проблемных вопросов, которые «разворачивают» проблемную ситуацию в различных, часто неожиданных для ученика контекстах и концентрируют его внимание на ключевой детали проблемной ситуации; в-третьих, демонстрация учащимся образца

рассуждения при решении проблемы; в-четвертых, наличие особых оборотов речи, стимулирующих мыслительный процесс («Наблюдая..., нетрудно заметить, что...», «При сравнении этих двух точек зрения...», «Представим себе, что будет, если...», «Попробуем разобраться в...», «Обоснуйте предложенное решение»).

3) *Ориентация на формирование интеллектуальных умений,* связанных с саморегуляцией учебно-познавательной деятельности (умений планировать собственную деятельность, оценивать и контролировать свои действия, предвосхищать искомый результат и т. д.).
4) *Создание условия для внутренней мотивации учебно-познавательной деятельности.* В частности, средствами учебного текста учащиеся подводятся к обсуждению необходимости перехода к новому материалу (Почему возникла необходимость изучать данный вопрос именно сейчас? Какие ситуации обусловливают появления нового понятия? Почему мы не можем решить данную задачу и каких знаний нам недостает? и т. д.). Важную роль играет включение мотивирующего компонента в структуру учебных заданий (особенно на этапе введения теоретического материала).
5) *Развитие творческих способностей* учащихся. Особое значение для развития творческих качеств учащихся имеют смыслопорождающие возможности учебного текста (способность текста инициировать процесс порождения смыслов). По Ю. М. Лотману, смыслопорождающие возможности текста реализуется за счет соположения принципиально альтернативных его фрагментов. Более того, по его словам, текст абсолютно понятный есть вместе с тем и текст абсолютно бесполезный (Лотман, 1999). Соответственно текст учебника должен включать неожиданные сочетания разных трактовок, предусматривать возможность «скачкообразного» перехода к текстам разного типа – от предметного к психологическому, от сюжетного – к доказательству и обоснованию и т. д.

IV. **Коммуникативная функция**

1) *Включение в текст вопросов разного типа.* Работа с текстом – это процесс коммуникации с читателем, поэтому в тексте учебника должны быть представлены проблематизирующие вопросы, привлекающие внимание учащихся к тем или иным

аспектам учебного материала, а также риторические вопросы, которые усиливают эффекты общения читателя-ученика с текстом как интересным собеседником. В этой связи В. Г. Бейлисон отмечает: «Местоположение вопросов-заданий – это признак, в определенной мере характеризующий тип учебной книги и уровень ее эффективности» (Бейлисон, 1986, с. 110).

2) *Диалоговый характер* учебного текста. Традиционный учебный текст, как правило, выступает как директивный монолог: авторитетный (взрослый) автор сообщает всю необходимую и всегда правильную информацию, а от ученика-читателя требуется ее усвоить и воспроизвести. Однако ведущим дидактическим условием понимания учебного материала является диалогическое взаимодействие ученика с учебным текстом. Диалог в учебнике делает учебник интересным для ученика, включая его в качестве «соучастника» в интеллектуальный поиск. По мнению Л. Э. Генденштейна, «успех любого автора – художественной ли книги, популярной или учебника – определяется именно тем, в какой степени автор смог создать атмосферу диалога» (Генденштейн, 1988, с. 112).

3) *Экспрессивный характер* учебного текста предполагает, во-первых, популярность изложения (с учетом возраста и уровня знаний учащихся), что подразумевает использование сравнений, ярких примеров, афоризмов, необычных графических приемов оформления текста и т. д.

   Кроме того, реализация требования экспрессивности учебного текста предполагает занимательность, увлекательность изложения, что стимулирует активное взаимодействие ученика с учебным текстом. Прежде всего, это означает выразительность языка и речи, свежесть и оригинальность выражений, драматизацию изложения (в том числе с помощью сюжетных историй). В этом отношении учебная литература сближается с научно-популярной. Принципиальных различий между этими стилями не существует, и многие приемы научно-популярной литературы с успехом могут быть использованы в школьных учебниках.

V. **Воспитательная функция**

1) *Наличие в учебных текстах мировоззренческих, историко-научных и методологических знаний.* Начинать проектирование учебника следует не только с разработки системы научных по-

нятий, но, прежде всего, с определения системообразующих элементов его содержания – мировоззренческих идей (Пунский, 1991). Эти типы знаний дают возможность передать ученику средствами учебного текста обобщенные способы познания окружающей действительности, то есть обеспечить формирование в сознании учащихся научной картины мира. А. Л. Жохов перечисляет мировоззренческие умения выпускника школы, которые могут служить ориентиром в анализе учебных текстов с точки зрения их соответствия задаче развития мировоззрения школьника (Жохов, 1995).

Особую роль в реализации данного требования играют ценностно-ориентированные тексты (Кулюткин, 1977). Идеи, которые проводятся автором в такого рода текстах, суть идеи-оценки, идеи-чувства. Например, в учебниках математики это могут быть тексты по истории математики, которые дают возможность школьникам увидеть роль математики в общечеловеческой культуре, познакомиться с творчеством ученых-математиков, оценить драматургию их профессиональной судьбы.

2) *Формирование качеств личности* средствами учебного текста, таких как умение принимать во внимание чужое мнение, готовность правильно реагировать на противоречие, уважительное отношение к интеллектуальному богатству прошлого и т. д. В связи со сказанным весьма справедливым представляется утверждение о том, что «очень важна в текстах учебника интонация общения автора с учениками; в этой интонации должна быть заложена энергия добра» (Граник, Бондаренко, Якиманская, 2004, с. 280).
3) *Личностная значимость* учебного текста для ученика как одно из условий порождения воспитательных эфектов. Любой учебный текст, по словам И. С. Якиманской, – это «своеобразное соединение и описание „чужой“ и „моей“ мысли» (Якиманская, 1996). Учебный текст должен строиться не только на объяснении-трансляции значений, но и на построении личного, «живого знания» (В. П. Зинченко). При этом отмечается необходимость преодоления в учебном тексте линейности, непротиворечивости, анонимности и завершенности знания-итога, знания-экстракта за счет включения текстов, позволяющих ученикам продемонстрировать личное отношение к изучаемому материалу.

VI. **Функция дифференциации обучения**

Во многих работах по проблемам школьного учебника обосновывается необходимость уровневого построения учебных текстов. Некоторая часть учащихся по своему усмотрению работает с более простыми текстами, в то время как другая часть учащихся использует для работы более сложный текст. В свою очередь, для учащихся с устойчивым предметным интересом возможен и третий вариант текстов, а именно проблемные тексты.

Требование дифференцированного представления учебного материала (в виде разнородных по стилю и различных по степени сложности учебных текстов) относится не только к учебнику, но и ко всем компонентам учебно-методического комплекса (учебным книгам, практикумам, тетрадям для самостоятельной работы).

VII. **Функция индивидуализации обучения**

Средствами учебного текста должны учитываться индивидуальные познавательные предпочтения учащихся: учебный материал должен быть организован таким образом, чтобы ученик имел возможность выбора заданий, а также режима учебной деятельности (исполнительского, проблемного, исследовательского, проектного) в соответствии со своими склонностями. Особая задача – учет средствами учебного текста индивидуальных познавательных стилей учащихся: стилей кодирования информации, стилей переработки информации, стилей мышления и стилей познавательного отношения к миру (Холодная, 2004).

Таким образом, школьный учебник (в современном понимании – учебно-методический комплект), разработанный на основе требований психодидактического подхода, принципиально меняет свой статус, превращаясь в своего рода «интеллектуальный самоучитель».

Еще раз подчеркнем: реализация всех вышеперечисленных функций в полном объеме возможна только в рамках учебно-методического комплекта (УМК), который разрабатывается по определенному учебному курсу и который включает целый набор учебных материалов для каждого класса (учебник, учебные книги, практикум, рабочие тетради, компьютерные программы и т. д.). В свою очередь, при этом возникает необходимость разработки учебных текстов нового типа, а именно развивающих учебных текстов.

2.3. Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся

Развивающий учебный текст (аналогично качественному научному, историко-культурному, художественному текстам) не является линейным образованием. Он должен быть построен как некоторое многомерное семантическое пространство, в рамках которого ученик-читатель может мысленно перемещаться в разных направлениях.

Фактически развивающий учебный текст (если это текст учебника или учебной книги) является своего рода *гипертекстом,* поскольку характеризуется рядом специфических особенностей:

- нелинейность – структура учебного текста, наряду с его «ядром» (определенной предметной информацией), предполагает «смысловые разрывы» в виде проблемно-рассуждающих фрагментов, сюжетных историй, элементов игровых ситуаций, психологических комментариев. Отказ от линейного характера учебного текста позволит ученику-читателю с большей легкостью переходить к его смыслам, поскольку пространство смыслов – нелинейно;
- разнородность – использование разных форм предъявления информации, наличие текстов разной степени сложности (как по содержанию, так и по способам учебной деятельности); возможность изучения материала в разных режимах; включение текстов разных жанров и стилей;
- неполнота и неоднозначность – в учебных текстах присутствуют элементы неопределенности, которые усиливаются обращенными к учащимся вопросами (принципиальное преимущество неопределенности заключается в том, что она актуализирует потребность «избавиться» от неопределенности, являющейся одним из важнейших источников творчества);
- эффект личного участия – обеспечивается диалоговым характером учебных текстов, сюжетной основой текста как важнейшим средством эмоциональной поддержки ученика и условием мобилизации ресурсов его житейского опыта, возможностью выбора способа изучения материала в зависимости от уровня подготовки ученика, его предпочтений и индивидуального познавательного стиля;
- возможность навигации (передвижения) по тексту – ученик-читатель может переходить от текста учебника к текстам сюжетной учебной книги либо практикума; в рамках практи-

кума – к заданиям разных уровней сложности; параллельно работать с практикумом и компьютерной программой с целью самодиагностики своих знаний;
- самостоятельность – учебные тексты организованы так, что знание не дается в готовом виде: ученик постепенно и самостоятельно подходит к определениям и новым понятиям, при этом формируется умение самоконтроля (готовность сказать себе «Стоп!», найти ошибку в рассуждениях и т. д.); особую роль играют тексты, приглашающие учащихся к самостоятельному созданию авторского текста.

Эффект гипертекста, безусловно, создается одновременно всеми элементами учебно-методического комплекса (учебником, учебными книгами, практикумами-задачниками, тетрадями для самостоятельной работы, электронными материалами). Если учебные тексты представлены в бумажном виде, то в более строгом смысле слова нужно говорить о статических гипертекстах с жесткой структурой. Тем не менее принципы организации таких текстов качественно отличаются от организации традиционного учебного текста (Баранов, 2001).

Таким образом, учебные тексты нового поколения – это развивающие тексты, построенные как гипертексты, на основе которых учитель может выбрать для разных учеников разные траектории усвоения одного и того же учебного материала и которые создают условия для выбора самим учеником предпочитаемого им способа интеллектуального поведения.

В области школьного образования интерес к текстам связан с пониманием их роли как условия эффективного обучения, в частности, в контексте «теории читателя» (*reader-oriented theory*), согласно которой читатель активно конструирует значения (понятия) в процессе чтения текста, в том числе когда ученик работает с учебником математики (Weinberg, Wiesner, 2011).

Подчеркивание принципиально важной роли учебного текста в образовательном процессе позволяет выйти за пределы некоторых стереотипов. Например, приходится сталкиваться с широко распространенным убеждением в том, что обучать математике – значит учить школьников решать задачи. На наш взгляд, обучать математике – значит учить школьников работать со значениями и смыслами математических понятий и математических действий. Соответственно посредством работы ученика с развивающими учебными текстами можно обеспечить высокий уровень понимания математического материала, что и будет условием его успешности при решении задач.

Еще одно важное уточнение касается структуры развивающего учебного текста. С одной стороны, понятие развивающего учебного текста объединяет все содержательные, структурные и стилистические элементы учебника (или учебной книги, или практикума-задачника) в качестве *макротекста*. С другой стороны, элементами такого текста являются *микротексты* (отдельные задания, заголовки, вопросы к читателю, исторические комментарии, контрольные работы, справочники, таблицы, рисунки и схемы).

Итак, один из перспективных путей интеллектуального воспитания школьников в процессе обучения – это работа ученика со специально сконструированными *развивающими учебными текстами*, отвечающими определенным психодидактическим требованиям. Это означает, что развивающие учебные тексты, будучи проекцией структуры научного знания, в то же время обеспечивают формирование психологических механизмов продуктивной интеллектуальной деятельности.

2.4. Психодидактические требования к развивающим учебным текстам

Нами были сформулированы психодидактические требования к развивающим учебным текстам, которые были реализованы в учебно-методических комплектах по математике для 5–6-х и 7–9-х классов в образовательном проекте «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ) (см. состав УМК МПИ в *Приложении*).

1. *Тематическая организация содержания курса математики*. В учебниках и учебных книгах материал организован в рамках определенных тем школьного курса математики. Например, учебно-методический комплект для 5-го класса включает темы: «Натуральные числа и десятичные дроби», «Положительные и отрицательные числа»; учебно-методический комплект для 6-го класса – темы «Решение уравнений», «Делимость чисел», «Рациональные числа», «Координаты. Диаграммы. Симметрия». Тот же принцип организации учебного материала использован в учебно-методических комплектах для 7–9-х классов.

Разделение учебного материала по темам позволяет более последовательно и развернуто выстроить курс математики. Каждая тема имеет специфические дидактические, мировоззренческие и психологические функции, учет которых значительно расширяет образовательное пространство математики как учебного предмета. Кроме того, выделение тематических «блоков» дает возможность учителю более гибко планировать учебный процесс, принимая во внимание особенности разных групп учащихся. Наконец, такой принцип организации математического содержания позволяет реализовать в обучении «метод погружения» в тему (справедливо говорят, что больше пользы приносит рассмотрение одного предмета с десяти различных сторон, чем рассмотрение десяти предметов с одной стороны).

2. *Полимодальность учебных текстов.* В учебниках и учебных книгах МПИ используются разные формы предъявления учебной информации (словесно-символическая, визуальная, предметно-практическая, эмоционально-оценочная); тексты разного типа (нормативные, инструктивные, объяснительные, рассуждающие, проблемные, историко-культурные, психологические); разные приемы организации текста, инициирующие различные виды учебной деятельности (исполнительскую, исследовательскую, проектную, творческую); тексты разного уровня сложности; тексты, позволяющие усваивать математический материал в разных режимах мыслительной деятельности (логического обоснования, анализа реальных практических ситуаций, опоры на «невозможные» аспекты математического знания).

С этой точки зрения, избыточность развивающего учебного математического текста – неотъемлемая его характеристика, поскольку при этом создается развернутое семантическое пространство, в котором можно выбрать либо выстроить траекторию обучения для учеников с разным уровнем подготовки и разным складом ума. Особое значение имеет возможность навигации по всем элементам учебно-методического комплекта (перехода от учебника к учебной книге, от практикума – к тетради для самостоятельной работы либо компьютерной программе). Кроме того, разнообразие учебных текстов создает условия для формирования универсальных учебных действий (УУД), связанных с умениями работать с текстом (смысловое чтение, готовность воспринимать тексты разного стиля, извлечение необходимой информации, постановка вопросов к тексту, выделение основных идей и формулирование выводов, обсуждение текста, самостоятельное создание текстов и т. д.).

3. *Единство декларативных, процедурных, метакогнитивных и ценностных знаний.* Наряду с формированием системы матема-

тических понятий, особое внимание уделяется обучению эффективным способам учебно-познавательной деятельности (освоению алгоритмов, обучению арифметическим и алгебраическим операциям, формированию умения решать текстовые задачи, готовности выбирать рациональный метод решения и т. д.). Кроме того, с помощью определенных текстов ученикам сообщаются сведения об особенностях работы интеллекта, а также об устройстве научного знания и условиях успешности интеллектуальной деятельности (эти разделы учебных книг под названием «Психологические комментарии» ориентированы на формирование такого УУД, как самопознание и самоопределение). Наконец, учебные тексты, демонстрируя ценностный характер математических знаний, создают условия для высказывания оценочных суждений.

4. *Ориентация на понимание* математических фактов, идей, теорий. Развивающие учебные тексты строятся с учетом психологических закономерностей процесса образования понятий (использование различных способов кодирования содержания понятия, формирование когнитивных схем математических понятий и способов математической деятельности, работа с семантикой математического языка, дифференциация признаков понятий по степени их существенности, включение понятия в систему связей с другими понятиями, выстраивание иерархии понятий разной степени обобщенности, учет основных фаз процесса образования понятия.

По мнению С. Р. Когаловского, специфика математики заключается в том, что она способствует формированию метапредметных (абстрагированных от предметной данности, предельно обобщенных) способов познавательной деятельности. При этом условием и «стержнем» продуктивного обучения математике выступает формирование, освоение и развитие фундаментальных математических понятий и как ведущего предмета, и как «средств производства» математической деятельности. Соответственно подчеркивается принципиально важная роль теоретического начала в школьном курсе математики. Его «эпицентром» должно стать обращение к фундаментальным математическим понятиям, к процессам их формирования и развития. В свою очередь, метапредметный план мотивирует обращение к возможным мирам и методам их исследования (Когаловский, 2014, 2015). Таким образом, говорить нужно не просто о понимании учебного материала, а о его понимании на теоретическом уровне, что требует соответствующей перестройки текстов учебников и учебных книг.

Кроме того, развивающие учебные тексты способствуют развитию базовых интеллектуальных умений (познавательных и регулятивных универсальных учебных действий) как основы понимания (умений доказывать, оценивать, обосновывать, планировать, прогнозировать, правильно реагировать на противоречия, исследовать и т. д.). Наконец, поскольку действительное понимание предполагает активное участие самого ученика в процессе усвоения знания, тексты, наряду с констатацией «готового» математического знания, воспроизводят процесс его рождения.

Наконец, важно учитывать два психологических момента, характеризующих состояние понимания: во-первых, необходимо подвести учеников к ситуации непонятности с последующим созданием условий для осознания причин такого состояния и, во-вторых, обеспечить возможность рефлексии усвоенного знания. Ибо подлинное понимание – это знание о собственном незнании и собственном знании.

5. *Формирование у учащихся рефлексивной позиции.* Содержание развивающих учебных текстов (последовательность изучения каждой темы, подбор вопросов и учебных заданий) построено таким образом, чтобы способствовать формированию у учащихся рефлексивной позиции (осознанности и произвольности) по отношению к собственной учебной деятельности. Изложение учебного материала в тексте учебника или учебной книги осуществляется последовательно и медленно, с детальным обсуждением разных аспектов вводимого математического объекта.

6. *Диалоговый характер учебных текстов.* Важнейшее назначение развивающего учебного текста – организация диалога ученика с текстом, в котором текст выполняет роль «собеседника». Основная часть учебных текстов в УМК МПИ представлена в виде прямых и косвенных диалогов (общаются между собой персонажи сюжетных историй, через текст идут постоянные обращения к ученику как читателю и т. д.). Диалог с текстом организуется через постановку вопросов к тексту, выдвижение предположительных ответов на эти вопросы и гипотез относительно дальнейшего содержания текста, обсуждение представленных в тексте альтернативных точек зрения и т. д. В итоге создаются условия для формирования целого ряда регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД (действий целеполагания, построения речевых высказываний в монологическом и диалогическом режимах, учебной работы в условиях совместной деятельности).

Особую роль играют сюжетные учебные книги (5–6-е классы), в которых диалог организуется за счет участия ученика в анализе математических проблем вместе с героями сюжетных историй. Благодаря сюжету, ученик мотивационно включается в работу с текстом; соотносит свое учебное поведение с интеллектуальным поведением героев с разными познавательными позициями и разными познавательными стилями; осваивает навыки обсуждения учебной проблемы в режиме диалога и полилога, привыкая принимать и анализировать другую точку зрения. Кроме того, сюжет обеспечивает условия для формирования личностных и коммуникативных УУД (действий нравственно-этического оценивания через анализ поведения персонажей, разрешения конфликтных ситуаций и т. д.).

Таким образом, диалоговый характер учебного текста означает, что текст берет на себя роль «умного и доброжелательного собеседника».

7. *Опора на самостоятельность учащихся* в процессе усвоения математического знания. Развивающий учебный текст предоставляет ученику самостоятельность в процессе изучения математического материала. Текст «отпускает» ученика вперед, позволяя ему самостоятельно осваивать те или иные вопросы; в учебниках использован такой прием организации работы с текстом, как «обращение к читателю», направленный на инициацию самостоятельной деятельности ученика. Средствами текста происходит постепенная передача функций постановки цели учебной деятельности самим ученикам и стимулирование учащихся к самостоятельному порождению учебных текстов. Тем самым обеспечивается формирование таких базовых УУД, как действия смыслообразования, волевого усилия, самостоятельного создания способов решения, инициативного сотрудничества и т. д.

8. *Индивидуализация обучения.* Развивающие учебные тексты предоставляют учащимся с разным уровнем подготовки, разными познавательными стилями, разными познавательными склонностями возможность выбора разных способов изучения учебного материала:

- формы предъявления учебной информации (ученики с разными познавательными стилями могут работать с информацией, представленной в словесной, визуальной, предметно-практической, эмоционально-метафорической формах);

- темпа продвижения по учебному материалу (каждый ученик может продвигаться по учебному тексту в удобном для себя темпе – например, при работе с практикумом в 5–6-х классах либо проходя последовательно все задания, либо сосредоточившись на первом «диагностическом» задании, либо сразу переходя к финишным заданиям);
- режима учебной деятельности (исполнительский, игровой, исследовательский, проектный; переход из режима учебы в режим игры, из режима активного обсуждения в режим одиночного чтения текста и т. п.);
- уровня сложности теоретического материала и заданий (в практикумах для 5–6-го класса ученик, просмотрев задания, сам может выбрать ту ступеньку, на которой он хотел бы работать, – I либо II);
- формы контроля и самоконтроля.

9. *Опора на личный опыт.* Развивающие учебные тексты апеллируют к житейским впечатлениям и обыденным знаниям учеников, стимулируют готовность доверять собственным интуитивным оценкам при анализе учебной информации. При этом создаются условия для того, чтобы каждый ученик задался вопросом о том, какой смысл имеет данный учебный материал именно для него, осознал его личностную значимость, сумел проверить свою самооценку (например, при выполнении рейтинговых контрольных работ).

10. *Текущая диагностика динамики учебно-познавательной деятельности* учащихся. В качестве средств текущей диагностики в учебных текстах используются различные диагностические материалы. В учебники включены разделы «Проверь себя» для самодиагностики своих знаний. В практикумах для 5–6-го класса представлены диагностические задания, с помощью которых ученик может проверить и оценить свои знания определенного учебного материала; разноуровневые обучающие задания с дифференциацией уровня сложности (уровни I, II); контрольные работы в трех вариантах в зависимости от предпочитаемой учеником формы контроля (например, «Вычислите...»; «Докажите, что...», «Напишите рассказ о... и придумайте свои примеры»).

Текущая диагностика также осуществляется с помощью компьютерного ресурса «Компетентность. Инициатива. Творчество» – КИТ, www.school-collection.edu.ru), который обеспечивает условия для индивидуальной учебной диагностики и самодиагностики.

11. *Создание психологически комфортного режима умственного труда*. Под психологически комфортным режимом умственного труда понимается такой тип обучения, который вызывает у обучающихся чувство удовольствия и интереса, создает предпосылки для появления у каждого ученика чувства успешности своей учебной деятельности. В частности, сюжетные тексты учебных книг (сюжетные истории, в которых действуют известные детям литературные персонажи) помогают организовать эмоциональную и педагогическую поддержку учащихся с учебными и личностными проблемами (в первую очередь, тех детей, которые были неуспешны в изучении математики в начальной школе).

Для успешного учения (особенно при обучении в 5–6-х классах) очень важно, чтобы каждый ученик субъективно встал в позицию «я успешен», «я хороший», «я все понимаю», «я могу задавать любые вопросы», «я могу справиться с заданием по математике самостоятельно» и т. п. При этом у учеников средствами учебных текстов постепенно формируется открытая познавательная позиция в виде готовности анализировать любую, даже самую сложную учебную проблему и искать ее конструктивное решение.

Еще один важный аспект психологической комфортности обучения связан с формированием особого отношения к другим людям и самому себе по типу «все люди разные», «я отличаюсь от других учеников, а они отличаются от меня», «с теми, кто отличен от меня, следует договариваться». В результате ученик имеет возможность убедиться, что спорить можно и нужно или что ошибка – вещь естественная («не ошибается только тот, кто ничего не делает») и даже полезная, при этом он освобождается от чувства страха перед собственными неудачами.

Наличие психологически комфортной атмосферы является предпосылкой для формирования положительного отношения к учебному предмету (особенно это актуально по отношению к обучению математике, ибо дети часто испытывают страх перед математикой, который нередко трансформируется в негативное отношение к учителю математики).

Чтобы было понятно, чем развивающий учебный текст отличается от традиционного учебного текста, приведем примеры такого рода текстов из учебников математики УМК МПИ. Один текст, взятый из учебника 5-го класса, иллюстрирует особенности этапа введения «новых» действий над «новыми» числами (действий над десятичными дробями), при этом десятичные дроби изучаются одновременно с повторением знаний о натуральных числах. Другой текст, включенный в учебник 8-го класса, ориентирован на развитие у учащихся умения самостоятельно получать формулировки теорем, выявлять закономерности и включаться в исследовательскую деятельность.

Тема «Натуральные числа и десятичные дроби»
Параграф «Умножение десятичных дробей»

Мы научились умножать десятичную дробь на произвольное натуральное число. Теперь рассмотрим умножение двух десятичных дробей. Начнем с примера:

$$0{,}4 \cdot 0{,}2 = ?$$

Стоп! А имеет ли вообще смысл такое действие?

Когда десятичная дробь умножается на натуральное число, то смысл такого умножения понятен:

$$5{,}24 \cdot 7 = \underbrace{5{,}24 + 5{,}24 + 5{,}24 + 5{,}24 + 5{,}24 + 5{,}24 + 5{,}24}_{7\ \text{раз}}.$$

Но как быть с произведением $0{,}4 \cdot 0{,}2$? Не можем же мы записать сумму «0,2 слагаемых»!

Что же делать? Не будем сдаваться и попробуем подобрать задачу с практическим содержанием, при решении которой могло бы появиться такое произведение.

В предыдущем параграфе мы использовали умножение для нахождения площади прямоугольника. Составим и решим задачу о площади.

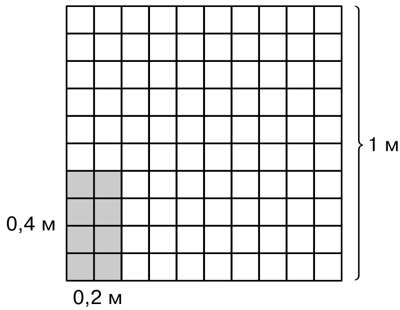
Задача 1. *Длина прямоугольной пластинки равна 0,4 м, а ширина – 0,2 м. Какова площадь этой пластинки?*

Чтобы найти площадь, нужно выполнить умножение: $0{,}4 \cdot 0{,}2$.

Однако мы пока не знаем, как умножить две десятичные дроби, поэтому поступим по-другому: 0,4 м = 4 дм, 0,2 м = 2 дм, площадь пластинки $4 \cdot 2 = 8$ (дм^2); 1 м^2 = $(10 \cdot 10)$ дм^2 = 100 дм^2, значит, 1 дм^2 = 0,01 м^2, то есть площадь пластинки равна 0,08 м^2.

Итак, решив эту задачу, мы получили результат:

$$0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$



Рассмотрим другой пример: 0,04 · 0,2. Опять на помощь придет практическая ситуация.

Задача 2. *Длина прямоугольной пластинки равна 0,04 м, а ширина – 0,2 м. Какова площадь этой пластинки?*
0,04 м = 4 см, 0,2 м = 2 дм = 20 см, площадь пластинки 4 · 20 = 80 см^2;
1 м^2 = (100 · 100) см^2 = 10000 см^2,
значит, 1 см^2 = 0,0001 м^2, то есть площадь пластинки = 0,008 м^2.
Получаем: 0,04 · 0,2 = 0,008.
Сравните полученные результаты:
0,4 · 0,2 = 0,08; 0,04 · 0,2 = 0,008.

Наверное, вы заметили: в произведении после запятой столько знаков, сколько в обоих множителях вместе. Эта закономерность будет выполняться для любых десятичных дробей.

Правило умножения двух десятичных дробей

- ***выполнить умножение чисел, не обращая внимания на запятую (умножить как натуральные числа);***
- ***подсчитать общее количество знаков после запятой в обоих множителях;***
- ***в записи произведения отсчитать справа столько же знаков и отделить их запятой.***

При этом:

а) если количество знаков в записи произведения совпало с количеством знаков, которые нужно отделить запятой, следует поставить слева запятую и записать в целой части 0:

$$0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35.$$

б) если количество знаков в произведении меньше количества знаков, которые нужно отделить запятой, следует дописать слева к произведению вместо недостающих цифр нули, поставить запятую и записать в целой части 0:

$$0,12 \cdot 0,3 = 0,036.$$

(Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 1, 2012, с. 140–142)

В данном развивающем тексте можно выделить несколько частей: 1) постановка цели с помощью проблематизации «не можем записать сумму 0,2 слагаемых...»; 2) связь решения новой задачи с уже имеющимся опытом в виде поиска «задачи с практическим содержанием, при решении которой могли бы появиться такие произведения»; 3) выявление закономерной связи между компонентами действия умножения и их обобщение. Как можно видеть, новое знание вводится в контексте прошлых знаний, при этом объектом изучения выступает само математическое действие (то есть формируется процедурное знание – учащиеся имеют возможность осознать состав и целесообразность действия умножения). Формулировка правила вводится только в конце текста как завершение самостоятельной интеллектуальной работы ученика.

Тема «Квадратные уравнения»
Параграф «Исследуем связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Теорема Виета»

Вы, вероятно, уже заметили, что информация о корнях квадратного уравнения скрыта в коэффициентах. Кое-что «тайное» для нас уже стало явным.

Наличие или отсутствие корней у квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта, который составляется из коэффициентов этого уравнения.

Корни уравнения можно находить по формуле, в которую входят его коэффициенты.

Как еще связаны между собой корни и коэффициенты квадратного уравнения? Чтобы раскрыть эти связи, полезно понаблюдать за коэффициентами и корнями различных квадратных уравнений.

Задание 1. Решите квадратное уравнение:

а) $x^2 + 5x + 6 = 0$; б) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Какие связи между корнями и коэффициентами уравнений вы подметили?

Подтвердятся ли ваши выводы для следующих уравнений:

в) $x^2-7x+6=0$; г) $x^2+7x+6=0$;
д) $x^2+6x+8=0$; е) $x^2-x-6=0$?

Попытайтесь свои выводы сформулировать и записать алгебраически.

При поиске закономерностей исследователи часто фиксируют свои наблюдения в таблицах, которые помогают обнаружить эти закономерности. Предлагаем и вам заполнить таблицу:

№	**Уравнение**	p	q	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
1	$x^2+5x+6=0$	5	6	−2	−3	−5	6
2	$x^2-5x+6=0$						
3	$x^2-7x+6=0$						
4	$x^2+7x+6=0$						
5	$x^2+6x+8=0$						
6	$x^2-x-6=0$						
7	$x^2+px+q=0$						

Помогла ли таблица в раскрытии связей между корнями и коэффициентами квадратных уравнений?

Сравните свои выводы о связях между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения с выводами, содержащимися в следующей теореме...

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013,
с. 110–111)

Данный текст построен как микроисследование: текст насыщен вопросами; учащимся предлагается выдвинуть гипотезу о связи между корнями и коэффициентами предложенных двух уравнений (квадратные уравнения а) $x^2+5x+6=0$ и б) $x^2-5x+6=0$ отличаются только знаком второго коэффициента); им предоставляется возможность сформулировать предположение о том, что они хотели бы проверить и записать алгебраически результаты своего исследования (в помощь им предлагается занести результаты своей работы в таблицу и самостоятельно обнаружить нужную закономерность). То есть новый материал (формулировка теоремы Виета) подается не как готовое знание, а является результатом размышлений самих учащихся, которые – и это принципиально важно – инициируются и организуются средствами учебного текста.

2.5. Психодидактическая типология развивающих учебных текстов

На основе структурной модели интеллекта (рисунок 1) нами были разработаны развивающие учебные тексты разных типов по курсу школьной математики (5–9-е классы). Под *учебным математическим текстом* мы понимаем совокупность знаков и символов математического и естественного (русского) языков, обладающую математическим значением, отвечающую критериям научного стиля письменной речи и имеющую определенный психологический адресат. К учебным математическим текстам относятся как развернутые описания (определения, описания, теоремы, обоснования, доказательства и т. д.), так и локальные элементы текста (отдельные задания, обращения к читателю, примеры, формулы, графики, чертежи и т. д.).

Еще раз подчеркнем, что в рамках предлагаемого нами подхода к обучению математике развивающие учебные математические тексты построены так, что определенный тип учебного текста имеет определенный психологический адресат: соответствует конкретному компоненту в структуре ментального опыта и ориентирован на его формирование.

Каждый тип развивающего учебного текста следует рассматривать как *«текст-прототип»*, который характеризуется определенными инвариантными характеристиками (он фокусируется на определенном компоненте ментального опыта) и вариативными характеристиками (последние зависят от содержания конкретной темы учебного курса). Таким образом, текст-прототип – это типическое сочетание наиболее значимых семантических, синтаксических и прагматических свойств текста, обусловленных его содержанием и коммуникативной целью. В своем концентрированном виде текст-прототип воплощает наиболее вероятные черты того или иного класса (типа) текстов (Щирова, Гончарова, 2007).

Отметим, что тексты того или иного типа, с одной стороны, могут выступать в качестве целостного фрагмента текста учебника (учебной книги либо практикума), имеющего конкретный психологический адресат, – средствами такого текста ученики либо осваивают определенный способ кодирования информации, либо выбирают способ деятельности при изучении нового материала, либо учатся работать с метафорой и принимать решение в «невозможной» ситуации и т. д. С другой стороны, тексты каждого типа могут выступать в качестве микротекста внутри определенного учебного текста, то есть один учебный текст может содержать несколько развивающих учебных текстов разного типа. В частности, приведенный пример развивающего учебного текста из учебника для 8-го класса (с. 54–55) включает такие типы текстов, как текст – проблематизация, текст – поиск формулы, текст – получение формулировок, текст – поиск и обобщение закономерностей.

Важно подчеркнуть, что задача интеллектуального воспитания учащихся средствами развивающих учебных текстов может быть решена при условии систематической работы с такими текстами на достаточно длительном этапе обучения (в проекте МПИ – с 5-го по 9-й класс). Именно длительное погружение в развивающую «текстовую среду» обеспечивает обогащение ментального опыта учащихся и рост их интеллектуальных способностей. Более того, при этом создаются предпосылки для эффектов «кристаллизации» индивидуального ментального опыта, которые невозможно предсказать, но которые являются основой проявлений интеллектуальной одаренности.

В таблице 1 представлена психодидактическая типология развивающих учебных текстов (на примере учебных математических текстов).

Таблица 1

Психодидактическая типология развивающих учебных текстов

Компоненты ментального опыта	Учебные действия	Типы учебных тестов
Когнитивный опыт		
Способы кодирования информации	Словесно-символический	• освоение математической символики • поиск формулы • получение формулировок
	Визуальный	• формирование нормативного образа • классификация образов • развитие образа • мотивация нового образа • перевод со словесно-символического способа кодирования информации на визуальный • инициация индивидуального образного опыта
	Предметно-практический	• лабораторная работа • практическая ситуация
	Сенсорно-эмоциональный	• эмоциональное впечатление • метафора • игра
Декларативные когнитивные схемы	Когнитивные схемы математических понятий	• введение фокус-примера • создание фрейма • конспект
Процедурные когнитивные схемы	Когнитивные схемы способов математической деятельности	• алгоритм (процедура) • операция
Понятийный опыт		
Семантические структуры	Семантика математического языка	• значение термина • систематизация значений терминов • перевод с родного языка на язык математики
Категориальные структуры	Выявление признаков понятий и формирование связей между понятиями	• выявление признаков понятия • оценка и выбор признаков понятия • установление связей между понятиями • мотивировка понятия • категоризация понятия • обогащение содержания понятия • перенос понятия в новую ситуацию • свертывание содержания понятия

Продолжение таблицы 1

Компоненты ментального опыта	**Учебные действия**	**Типы учебных тестов**
Концептуальные структуры	Конструирование понятий и создание текстов	• поиск и обобщение закономерностей • моделирование • микросочинение • самостоятельное создание текста • приглашение к проекту
Метакогнитиный опыт		
Непроизвольный и произвольный интеллектуальный контроль	Планирование	• программа • выбор цели • построение плана
	Прогнозирование	• разработка гипотезы • прогноз в ситуации неопределенности • прогноз результата действия
	Самоконтроль	• способы самоконтроля • выбор способа самоконтроля • поиск ошибок
Метакогнитивная осведомленность	Рефлексия собственной интеллектуальной деятельности	• рефлексия методов решения • самооценка своих знаний и умений • учебная самодиагностика • психологический комментарий
Открытая познавательная позиция	Готовность работать с противоречивой информацией	• проблематизация • альтернатива • столкновение разных точек зрения • невозможная ситуация
Интенциональный (эмоционально-оценочный) опыт		
Предпочтения Убеждения Умонастроения	Выбор способа учения	• выбор способа деятельности • выбор познавательной позиции • индивидуальный познавательный стиль
	Актуализация интуитивного опыта	• догадка • творческая работа
	Ценностное отношение к учебному материалу	• математика в окружающем мире • ведущие линии развития математики • история математики

ГЛАВА 3

Психологические адресаты и характеристики основных типов развивающих учебных текстов (на примере школьного курса математики для 5–9-х классов)

Ниже приводится краткая характеристика каждого типа развивающего учебного текста в зависимости от его психологического адресата. Примеры текстов взяты из учебно-методических комплектов проекта «Математика. Психология. Интеллект» (УМК МПИ для 5–9-х классов) (см. список всех учебных материалов в *Приложении,* согласно которому приводятся ссылки на тексты).

3.1. Словесно-символический способ кодирования информации

- **Текст – освоение математической символики**

Согласно Л. С. Выготскому, способность употреблять слова, использовать знаки в качестве средства образования понятий – это ключевое условие формирования понятийного мышления («мышления в понятиях»). Соответственно математический язык выступает в качестве специального объекта изучения в курсе школьной математики.

Важным аспектом освоения математического (в частности, алгебраического) языка является изучение его элементов (чисел, букв, скобки, знаков операций, знаков равенства/неравенства и др.) с помощью особых текстов, которые ориентируют учащихся на описание реальных и математических объектов на языке математической символики.

Алгебраический язык имеет много общего с языком, на котором мы разговариваем. Но есть у него и существенные отличия! Перечислим основные знаки этого языка:

1. *Цифры,* с помощью которых записываются числа:
   0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2. *Переменные*. Они обозначаются буквами латинского алфавита (латиницей). В зависимости от ситуации будем называть переменные также *неизвестными* или *параметрами:*

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j l m n o p q r s t u v w x y z

3. *Знаки операций:* +, –, ·, : (сложение, вычитание, умножение, деление). Для обозначения операции деления будет использоваться также и дробная черта.
4. *Скобки* () и запятая. С помощью скобок устанавливается порядок, в котором нужно выполнять операции. Запятая используется для записи десятичных дробей.
5. Знаки равенства и неравенства: $=, \neq, <, >, \leqslant, \geqslant$.

$$+ \quad - \quad \cdot \quad : \quad / \quad (\;) \quad = \quad \neq \quad < \quad > \quad \leq \quad \geq$$

По мере необходимости набор знаков алгебраического языка будет пополняться.

Из знаков, перечисленных в пунктах 1–4, образуются, по определенным правилам, *слова* алгебры – *алгебраические выражения*.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 13)

Специальные тексты ориентируют учащихся на применение алгебраического языка, в том числе в нестандартной ситуации (например, для разгадывания секрета фокуса).

Итак, начинаем исследование алгебраических выражений, в которых, кроме умножения, используется сложение.

Предлагаем познакомиться с тем, как с помощью сложения строятся алгебраические выражения и как при этом используются свойства сложения:

- *ассоциативность* (сочетательное свойство):
  $(a+b)+c=a+(b+c)$;
- *коммутативность* (переместительное свойство):
  $a+b=b+a$.

Из этих свойств следует, что для нахождения суммы ее *слагаемые можно произвольным образом объединять в группы и переставлять местами*.

Кроме того, будем использовать:

- *дистрибутивность* (распределительное свойство) умножения относительно сложения:
  $(a+b)c=ac+bc$.

Наконец, будем учитывать особую роль 0 при сложении:

$a+0=a$.

Во всех этих свойствах, как следует из определения тождества, буквы a, b и c могут обозначать не только числа, но и алгебраические выражения.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 70)

Задание 2. Решите задачу-фокус.

Задумайте натуральное число. Удвойте его. К полученному произведению прибавьте 5. Полученное число умножьте на 5. К результату прибавьте 10. Полученную сумму умножьте на 10. Если вы назовете число, которое у вас получилось, то можно назвать число, которое вы задумали.

Сравните свое решение со следующим.

Решение. Чтобы узнать разгадку фокуса, составим алгебраические выражения, о которых говорится в условии задачи. С задуманным числом n проделали следующие операции:

$n \cdot 2 = 2n$ – удвоили число;

$2n+5$ – прибавили 5;

$(2n+5) \cdot 5 = 10n+25$ – умножили на 5;

$(10n+25)+10 = 10n+35$ – прибавили 10;

$(10n+35) \cdot 10 = 100n+350$ – умножили на 10.

1) Вы назвали число $100n+350$. Если из этого числа вычесть 350, а результат разделить на 100, то получим задуманное вами число!
2) Раскройте секрет фокуса: «Задумайте четное число. Утройте его, возьмите половину полученного числа, утройте и ее. Если вы скажете, чему равно частное от деления найденного числа на 9, то можно назвать задуманное вами число».
3) Придумайте аналогичный фокус и продемонстрируйте его товарищам.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 5)

- **Текст – поиск формулы**

Тексты этого типа включают учащихся в работу по опознанию и преобразованию алгебраических выражений с тем, чтобы перейти к новой формуле. Текст может быть организован как использование текстовой задачи, способ решения которой мотивирует привлечение новой формулы, либо как работа с таблицей «с пропусками», проверяющей умение использовать разные знаково-символические средства.

Приведенный ниже текст способствует организации активной интеллектуальной деятельности учащихся в связи с получением формулы корней квадратного уравнения и включает три задания, каждое из которых играет свою особую роль.

Задание 1. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2-0{,}81=0$; б) $(x+1)^2-0{,}81=0$; в) $x^2-2x+1=0$; г) $x^2-2x+1=25$;
д) $x^2+2x=0$; е) $x^2-2x-24=0$; ж) $x^2+6x+40=0$.

Уравнения в задании 1 подобраны таким образом, чтобы учащиеся выявили основную идею решения новых для них квадратных уравнений на основе обобщения частных случаев: решение данных квадратных уравнений методом выделения полного квадрата сводится к решению уравнений вида $\square^2=r$. Однако все эти уравнения были приведенными. Поэтому далее в тексте ставится вопрос: «Любое ли квадратное уравнение можно привести к виду $\square^2=r$, где r – некоторое число?» – и вместе с учащимися ищется решение этой проблемы.

Задание 2. Заполните пропуски в таблице, объясняя каждый шаг.

$3x^2+7x+1=0$	$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$
$x^2+\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}=0$	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
$\left(x^2+2\cdot\frac{7}{2\cdot 3}x+\left(\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2\right)-\frac{49}{36}+\frac{1}{3}=0$	$\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\ldots+\frac{c}{a}=0$
$\left(x+\frac{7}{6}\right)^2=\ldots$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$
$\left(x+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{37}{36}$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$\frac{37}{36}>0$, значит, уравнение имеет корни: $x+\frac{7}{6}=\pm\sqrt{\frac{37}{36}}$;	Если выражение, стоящее в правой части уравнения, отрицательно, то уравнение не имеет действительных корней. Если же это выражение неотрицательно, то $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$;
$x_{1,2}=-\frac{7}{6}\pm\frac{\sqrt{37}}{6}$ $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{6}$	$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Ответ: $\frac{-7+\sqrt{37}}{6}$; $\frac{-7-\sqrt{37}}{6}$	*Ответ*: $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Таким образом, получена формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Для того, чтобы учащиеся увидели, что это не единственный способ получения формулы, предлагается еще одно задание:

Задание 3. Изучите, как приведено к виду $\square^2 = r$ и решено уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$.

$$4a(ax^2+bx+c)=0;$$
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0;$$
$$((2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2)-b^2+4ac=0;$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Если $b^2-4ac<0$, то действительных корней нет.
Если $b^2-4ac\geqslant 0$, то $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$;

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Данное задание дает возможность учащимся еще раз осознать идею преобразований, позволяющих получить формулу корней квадратного уравнения.

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 104–106)

- **Текст – получение формулировок**

Назначение этих текстов – найти то общее, что объединяет разные математические объекты, оформить свои наблюдения и сформулировать определение либо правило.

Приведем пример текста для учащихся 5-го класса по теме «Положительные и отрицательные числа», который состоит из двух частей.

«1) Заполните пропуски:

а) $2{,}5+\square<0$
б) $2{,}5\cdot\square<0$
в) $2{,}5:\square<0$
г) $2{,}5-\square<0$
д) $-374+\square=0$
е) $-374-\square=0$
ж) $\square\cdot(-374)=0$
з) $\square:(-374)=0$

2) Составьте примеры по схеме $\square*\square>0$, где $*$ – любое арифметическое действие.
3) Сформулируйте выводы о том, в каких случаях результат действия меньше нуля (равен нулю, больше нуля).

Например: «Произведение двух чисел меньше нуля, если ...».

(Математика: рабочая тетрадь для 6 класса. Положительные и отрицательные числа, 2013, с. 57)

Работая с этой частью текста, учащиеся на числовых примерах наблюдают, в каких случаях сумма (произведение, частное, разность) двух чисел меньше или равна нулю. Этот опыт они применяют, работая со второй частью текста, который ориентирует их на самостоятельный поиск формулировки соответствующего вывода на основе сопоставления объема и содержания понятия и выбора наиболее подходящих слов и словосочетаний.

Какие из следующих утверждений являются верными?

1) Из двух натуральных чисел больше то, у которого больше цифр в записи числа.
2) Из двух натуральных трехзначных чисел с разным числом сотен больше то, у которого больше количество единиц в разряде сотен.
3) Из двух десятичных дробей больше та, в записи которой больше цифр.
4) Из двух десятичных дробей больше та, у которой больше натуральное число, записанное в целой части.
5) Из двух десятичных дробей больше та, у которой больше дробная часть.
6) Из двух десятичных дробей с одинаковыми целыми частями больше та, у которой больше дробная часть.
7) Из двух десятичных дробей с одинаковыми целыми частями больше та, у которой больше число в разряде десятых.
8) Из двух десятичных дробей с одинаковыми целыми частями больше та, у которой больше знаков после запятой.

Для неверных, с вашей точки зрения, утверждений приведите опровергающий пример.

Сформулируйте правило сравнения десятичных дробей.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 179)

3.2. Визуальный способ кодирования информации

- **Текст – формирование нормативного образа**

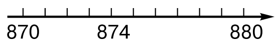
Нормативные образы – это образы, которые выработаны и в истории математики, и в истории преподавания школьной математики (таблица разрядов, числовой луч, координатная прямая, площадь квадрата, графики функций и т. д.). Нормативные образы являются носителями определенных математических понятий, поэтому средствами текстов должны быть созданы условия для выделения существенных свойств нормативных образов.

Ниже приводятся примеры текстов, которые направлены на работу с нормативными образами числового луча и координатной прямой и которые помогают выявить их общие и частные признаки.

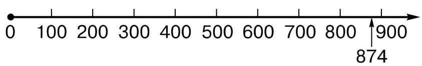
...А как же отметить на числовом луче большое число, например 874, ведь для этого нужно продвинуться слишком далеко вправо?

Можно предложить два способа:

1) изобразим только часть (фрагмент) числового луча:

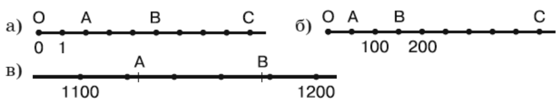


2) вместо единичных делений отметим деления для сотен и найдем примерное положение точки, которая соответствует числу 874:



(Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 1, 2012, с. 33)

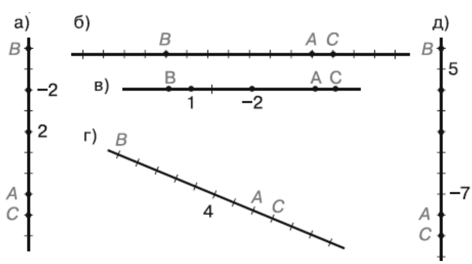
Запишите числа, соответствующие точкам *A, B, C* на числовом луче:



Обратите внимание, что в случае в) начало числового луча – точка *O* – находится за пределами рисунка.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 167)

1) Можно ли по данным рисункам а)–д) определить координаты отмеченных точек? Если да, то укажите эти координаты.

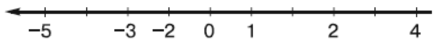


Пришлось ли вам ответить на следующие вопросы:

а) где на координатных прямых находится начало отсчета;
б) нужно ли указывать на них положительное направление;
в) какие координаты имеют точки A, B, C и чему равно расстояние между заданными точками в каждом случае?

Может быть, у вас появились свои вопросы?

2) Найдите допущенные на рисунке ошибки и исправьте их.



(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 111)

Данные тексты дают возможность рассмотреть такие существенные элементы образов, как единичный отрезок, начало отсчета, положительное направление.

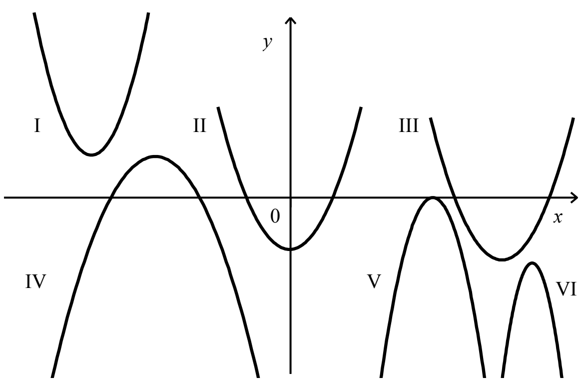
- **Текст – классификация образов**

Обогащению опыта использования визуальных средств переработки информации способствуют тексты, ориентирующие учащихся на соотнесение нормативного образа с рядом других образов по какому-либо признаку либо предлагающие самим придумать основу их классификации.

Приведем примеры двух текстов, направленных на классификацию образов различных квадратичных функций.

На рисунке даны графики квадратичных функций.

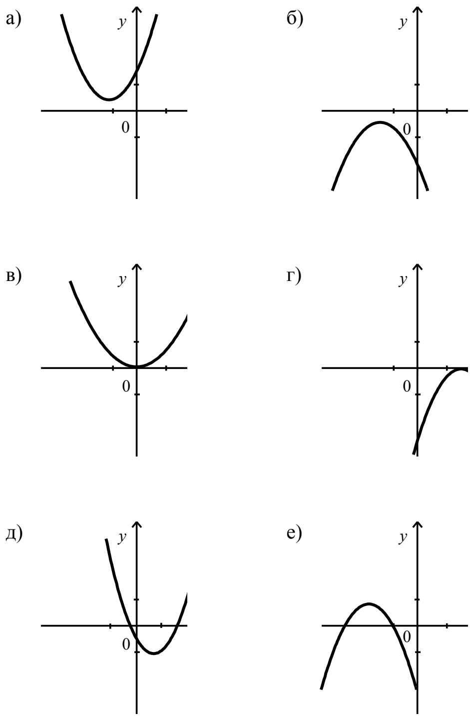
Какой из графиков указывает:



– на отсутствие нулей у функции;
– на то, что функция имеет только один нуль;
– на то, что нули (корни) функции имеют разные знаки;
– на то, что оба корня функции положительны;
– на то, что оба корня функции отрицательны?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 95)

Можно ли сказать, что на рисунке сделана некоторая классификация квадратичных функций?



Что положено в основу классификации функций? Какую бы классификацию предложили вы?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 96)

В первом тексте предъявлены основания для классификации (число нулей функции и знаки нулей функции), тогда как во втором тексте учащиеся должны сами выбрать основание для классификации функций.

- **Текст – развитие образа**

Визуальный способ кодирования информации осваивается с помощью учебного материала, который побуждает учащихся перестраивать хорошо известный им образ, варьировать и обобщать его признаки с целью повышения динамичности и широты образа как визуальной модели математического понятия.

Так, при изучении действительных чисел происходит развитие образа координатной прямой. Учащиеся работают с текстами, которые помогают им увидеть, что не каждой точке координатной прямой соответствует рациональное число и что эта проблема требует своего разрешения.

Построим отрезок длиной $\sqrt{2}$ на координатной прямой. Для этого проведем прямую (рисунок 6), укажем на ней направление, выберем две точки O и E, длину отрезка OE примем за единицу.

Построим на единичном отрезке OE квадрат (см. рисунок 6). Его диагональ OA равна стороне квадрата OACD. Возьмем циркуль и с его помощью построим на координатной прямой отрезок OB, равный по длине отрезку OA (рисунок 7).

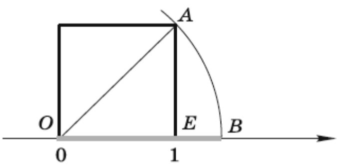


Рис. 6

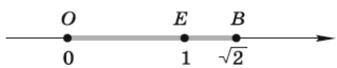


Рис. 7

Оказывается, что длина отрезка OB не выражается рациональным числом. Точке B, реально существующей на координатной прямой, не удалось поставить в соответствие никакое рациональное число...

Далее развитие образа координатной прямой продолжается после введения понятия «бесконечная непериодическая дробь».

При решении задач, связанных с измерением величин, мы столкнулись с необходимостью введения новых чисел.

Оказалось, что каждое из них можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, которой соответствует некоторая точка числовой оси.

Возникает вопрос: можно ли *каждой* бесконечной периодической или непериодической десятичной дроби поставить в соответствие некоторую точку числовой оси?

Рассмотрим, например, бесконечную непериодическую дробь 15,123456789101112.

В ее записи после запятой идут последовательные числа натурального ряда.

Как изобразить эту дробь, найти ее место на числовой оси?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 23, 28)

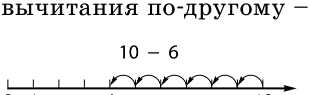
- **Текст – мотивация нового образа**

Важную роль для развития визуального способа кодирования информации играют тексты, которые «приглашают» учащихся к созданию нового образа, в том числе за счет организации в тексте ситуации, показывающей, что «старого» образа для решения новой проблемы недостаточно.

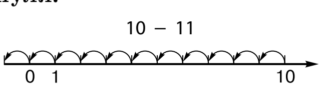
Так, в 5-м классе перед введением отрицательных чисел учащимся уже известен нормативный образ – числовой луч. Они умеют выполнять с его помощью сложение и вычитание натуральных чисел. В связи с ситуацией, когда из меньшего числа нужно вычесть большее, возникает проблема, решая которую, учащиеся обнаруживают, что известного им образа недостаточно для изображения разности типа 2–6, что нужен новый образ.

Приведем фрагмент учебного текста, в котором возникает новый нормативный образ – числовая прямая.

Рассмотрим действие вычитания по-другому – с помощью числового луча:



Попробуем поступить так же и с разностью 10–11. Только как от числа 10 «шагнуть» влево на 11 единичных отрезков? Нам придется перейти начальную нулевую отметку и отложить единичный отрезок за пределами луча – влево от нуля!



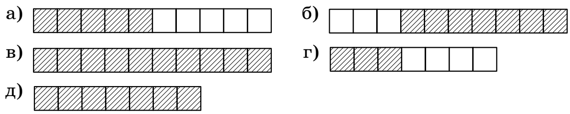
Можно откладывать единичные отрезки все дальше и дальше от нуля влево, превращая числовой луч в *числовую прямую*.

(Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 2, 2012, с. 61)

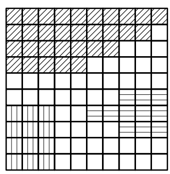
- **Текст – перевод со словесно-символического способа кодирования информации на визуальный**

Данный тип текстов создает условия для усвоения учащимися разнообразных приемов словесно-образного перевода, которые помогают осваивать признаки математических понятий (например, понятия «десятичные дроби»).

Какая часть фигуры закрашена?

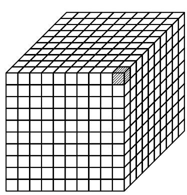


Изобразите: а) 0,9 полоски; б) 1,1 полоски; в) 1,5 полоски; г) 2,0 полоски.
Какая часть квадрата закрашена: а) косыми полосками; б) вертикальными полосками; в) горизонтальными полосками?
Какая часть квадрата: а) закрашена; б) не закрашена?



Вдоль ребра куба укладывается ровно 10 клеток.

1) Сколько маленьких кубиков (с ребром в одну клетку) поместится в этот куб?
2) Какую часть от всего куба составляет: а) один маленький кубик; б) три маленьких кубика?
3) Сколько маленьких кубиков составляют: а) 0,001 часть куба; б) 0,01 часть куба; в) 0,1 часть куба; г) 1 целую часть куба?
4) Закрасьте: а) 0,1 часть куба; б) 0,02 части куба; в) 0,003 части куба; г) 0,013 части куба.



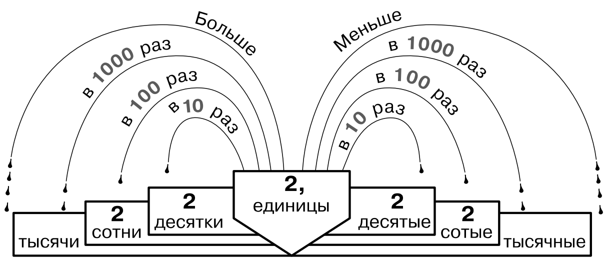
(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 174)

- **Текст – инициация индивидуального образного опыта**

Активное использование визуального способа кодирования информации предполагает не только формирование способности к визуализации математического материала с помощью нормативных образов, но и готовности самостоятельно строить образные модели математических понятий и фактов на основе личного визуального опыта. Такие тексты стимулируют учащихся к размышлению над тем, как, с их точки зрения, можно наглядно представить ту или иную информацию; придумать собственные образные модели математических объектов.

Один из учеников для записи десятичной дроби предложил образ, который передает особенности позиционной записи этих дробей (эта визуальная модель включена в текст сюжетной учебной книги для 5-го класса).

Как красиво и просто: **десятки – десятые, сотни – сотые**, – сказала фрёкен Снорк.

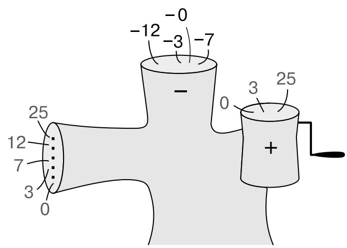


– Смотри, Снорк, а запись-то десятичных дробей похожа на фонтан: «струи» симметрично бьют из разряда единиц, – восхитился Муми-тролль.

– Мудрая красота... Если известно, как устроено число слева от запятой, то легко понять и устройство числа справа от запятой...

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 58)

Другой ученик предложил для иллюстрации идеи о том, что модулем любого числа является неотрицательное число, образ «мясорубки» с двумя входами, в которую забрасывают отрицательные, положительные числа и нуль, а на выходе получают только положительные числа и нуль (эта визуальная модель также вошла в сюжетную учебную книгу для 5-го класса).



(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 28)

По мере роста знаний учащиеся участвуют в рождении все более сложных обобщенных образов, характеризующих, с их точки зрения, содержание изучаемых математических понятий. Рассмотрим пример текста, в котором показывается, как с помощью фантастического автомата можно поставить в соответствие бесконечной периодической или непериодической десятичной дроби некоторую точку числовой оси (речь идет об усвоении одного из наиболее сложных понятий курса математики – понятия «действительные числа»).

При решении задач, связанных с измерением величин, мы столкнулись с необходимостью введения новых чисел.

Оказалось, что каждое из них можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, которой соответствует некоторая точка числовой оси.

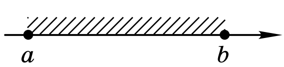
Возникает вопрос: можно ли *каждой* бесконечной периодической или непериодической десятичной дроби поставить в соответствие некоторую точку числовой оси?

Рассмотрим, например, бесконечную непериодическую дробь 15,123456789101112....

В ее записи после запятой идут последовательные числа натурального ряда.

Как изобразить эту дробь, найти ее место на числовой оси? Обратимся за помощью к «технике».

Представьте, что у нас есть фантастический автомат. Работа автомата с дробью 15,123456789101112... идет по следующим шагам. Договоримся для отрезка



использовать обозначение [a; b].

Шаг подготовительный

Автомат считывает цифры в записи дроби до запятой и откладывает на числовой оси вправо от точки 0 последовательно 16 единичных отрезков. Последний отрезок [15; 16] отмечается. Он имеет длину 1.

Если дроби 15,123456789101112... соответствует некоторая точка числовой оси, то эта точка лежит внутри отрезка [15; 16].

Шаг первый

Автомат считывает **1** – первую после запятой цифру нашей дроби, делит отрезок [15; 16] на 10 равных частей. Из полученных отрезков отмечает *второй* – отрезок [15,1; 15,2]. Он находится внутри отрезка [15; 16] и имеет длину 0,1.

Точка, соответствующая нашей дроби, должна лежать где-то внутри этого отрезка.

Шаг второй

Автомат отсчитывает **2** – второй знак после запятой, делит отрезок [15,1; 15,2] на 10 равных частей. Из полученных отрезков отмечает *третий* – отрезок [15, 12; 15, 13]. Он «вложен» в отрезок [15,1; 15,2] и имеет длину 0,01.

Точка, которая нам нужна, должна содержаться внутри этого отрезка...

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 28–29)

3.3. Предметно-практический способ кодирования информации

- **Текст – лабораторная работа**

Тексты этого типа способствуют активизации предметно-практического способа кодирования информации, формируя у учащихся способность воспринимать и понимать математические объекты в терминах предметных ситуаций и собственных предметных действий. Специфика данных текстов заключается в том, что в них четко описываются те действия, которые должен выполнить ученик, при этом, однако, создаются условия для анализа и обобщения своих действий (то есть средствами текста строится предметная модель математического понятия).

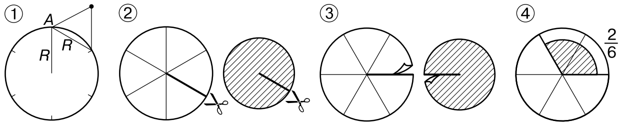
Приведем примеры лабораторных работ, углубляющих понимание свойств понятия «обыкновенные дроби» (6-й класс) и помогающих «увидеть» параболу (9-й класс).

Лабораторная работа

Цель: изготовить наглядное пособие для иллюстрации дробей.

Оборудование: 4 листа бумаги разного цвета, циркуль, ножницы, линейка.

1) Изготовьте наглядное пособие.



- Вырежьте из плотной бумаги круг радиуса 6 см и отметьте на его границе в любом месте точку A.
- Зафиксируйте раствор циркуля, равный радиусу, и от точки A последовательно отметьте с помощью циркуля на окружности еще 5 точек.
- Соедините каждую из отмеченных точек с центром окружности и по одному из радиусов сделайте разрез.
- Из другого листа бумаги приготовьте круг меньшего радиуса и тоже сделайте разрез.
- По разрезам вставьте один круг в другой.
- Вращайте круг меньшего радиуса до тех пор, пока не «увидите» дробь $\frac{2}{6}$.

2) Используя изготовленную вами модель, проиллюстрируйте дробь $\frac{1}{6}$. Какие еще дроби можно показать на вашей модели?
3) Изготовьте модели для иллюстрации дробей $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{9}{12}$ (желательно, чтобы все круги были разных радиусов).

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 122)

Лабораторная работа

Цель: с помощью модели проиллюстрировать равенство (или неравенство) дробей.

Оборудование: цветная бумага, циркуль, карандаш, линейка, ножницы, модель для иллюстрации дробей со знаменателями 3, 6, 12.

1) Сделайте модель для иллюстрации дробей со знаменателями 2, 4, 8 (круги делать желательно разного цвета и разного радиуса).
2) С помощью модели покажите, что: а) $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$; б) $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.

   Верны ли равенства: а) $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$; б) $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; в) $\frac{4}{6}=\frac{5}{8}$; г) $\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 125)

Лабораторная работа. Парабола как нитка с бусинками

- Начертите прямую d и на расстоянии p от нее отметьте точку F (рисунок 74).

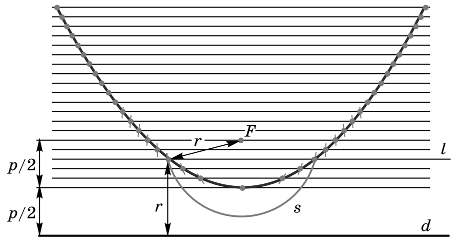


Рис. 74

- Выберите достаточно много чисел r, удовлетворяющих неравенству $r \geqslant \frac{p}{2}$.
- Для каждого выбранного числа r проведите параллельно прямой d прямую l, удаленную от d на расстояние r.
- Опишите дугу s окружности радиуса r с центром в точке F.

Точки пересечения построенных прямых l и соответствующих дуг s будут (как бусинки на нитку) нанизываться на параболу, поскольку они находятся на одинаковом расстоянии от фокуса F и директрисы d параболы.

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 124)

- **Текст – практическая ситуация**

Еще один из типов текстов, направленных на развитие предметно-практического способа кодирования информации, – это тексты, которые предлагают описать математические объекты в контексте практического опыта с использованием практической ситуации для введения нового понятия.

Ниже приводятся два текста этого типа (5-й класс). Первый текст способствует введению правил умножения натуральных чисел и десятичных дробей на 10, 100, 1000. Второй текст рассматривает применение десятичных дробей в различных практических ситуациях.

Одна головка сыра весит 0,53 кг, или 530 г. В таблице записан вес одной, десяти, ста и тысячи головок такого сыра в граммах и килограммах. Пользуясь таблицей, составьте правило умножения десятичной дроби на 10, 100, 1000.

Масса сыра	**Количество головок**			
	1	10	100	1000
в граммах	530	5300	53 000	530 000
в килограммах	0,530 = = 0,53	5,300 = = 5,3	53,000 = = 53	530,000 = = 530

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 111)

Прочитайте десятичные дроби на дорожном знаке, этикетке и чеке.


М-н "Вираж" ИП Коробцова Е.И.
ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ !
НМ 00015549 ИНН 311601017380 #8378
04.02.16 15:15
ПРОДАЖА №3277
1.Пирожное Заварное 120г Рус ИК
Код: 2297
2.000 Х 34.00
1 ≡68.00
2.Хлеб Ракитянский 600г
Код: 2023
1.000 Х 22.00
1 ≡22.00
3.Шпикачки по-Венски н-о Урожай
Код: 2799
0.494 Х 255.00
1 ≡125.97
==
ИТОГ ≡215.97
ПЛАТ. КАРТОЙ ≡215.97

Опишите несколько ситуаций, где используются десятичные дроби.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 175)

3.4. Сенсорно-эмоциональный способ кодирования информации

- **Текст – эмоциональное впечатление**

Назначение таких текстов – возбудить любопытство учащихся (создать ситуацию интеллектуальной интриги).

Приведем пример одного из таких текстов (7-й класс).

Определение. Число $\frac{a+b}{2}$ называется ***средним арифметическим чисел*** a ***и*** b.

С этим понятием мы уже знакомы. Познакомимся еще с одним средним.

Определение. Число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ называется ***средним гармоническим положительных чисел*** a ***и*** b.

Откуда произошло название «среднее гармоническое»?

Слово «гармония» в буквальном переводе с греческого означает «связь», «стройность». Именно в этом смысле оно понимается сегодня в архитектуре, живописи, музыке и т. д.

Еще древние греки заметили, что для получения гармонических созвучий струну музыкального инструмента надо делить не произвольным образом, а в определенных отношениях.

Если делить струну в отношении $1:2$, то звук повысится строго на октаву.

Если же струну разделить в отношении $\dfrac{2}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{\left(\dfrac{2+1}{1\cdot 2}\right)}=\dfrac{2\cdot 1\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$, то соответствующий музыкальный интервал тоже обеспечит благозвучие.

Задание 1. Докажите тождество:

$$1)\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b};\quad 2)\ \frac{1}{\left(\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2};\quad 3)\ \left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^{-1}=\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}.$$

Какие из тождеств выражают следующую связь между средним арифметическим и средним гармоническим: число, обратное среднему гармоническому положительных чисел a и b, равно среднему арифметическому чисел, обратных данным.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 228)

- **Текст – метафора**

Работа с подобного рода текстами позволяет использовать эмоциональные возможности метафоры как средства передачи информации о содержании понятия. Именно метафора дает возможность переходить от эмоциональной оценки объекта, которая осуществляется на основе личного знания, к выражению его объективного, понятийного смысла. Метафора помогает выявлять признаки понятия (определения, факта), «скрытые» за неоднозначностью формулировки, неопределенностью контекста. Метафора – это средство выражения гипотетического (вероятного знания), для которого еще не найдены четкие словесные формы его выражения, но которое человек «предчувствует», опираясь на сенсорно-эмоциональный способ кодирования информации.

Текст-метафора может создавать условия для того, чтобы учащиеся смогли одним взглядом охватить суть предстоящей деятельности. Приведем пример учебного текста, который помогает увидеть целесообразность изучения темы «Разложение на множители».

Для чего нужно раскладывать многочлены на множители? Какие методы разложения нам известны? Как «сотрудничают» между собой разные методы? Для ответа на эти вопросы предлагаем выполнить следующие задания.

Задание 1. Найдите значение многочлена:

$x^6+2x^5+9x^4+16x^3+24x^2+32x+16$ при $x=2$.

Определите, каким – положительным, отрицательным или нулевым – является значение этого многочлена при $x=-13821$.

Непосредственное вычисление займет у нас слишком много времени. Но «слон» превращается в «муху», если разложить данный многочлен на множители:

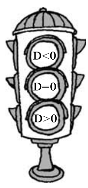
$x^6+2x^5+9x^4+16x^3+24x^2+32x+16=(x+1)^2(x^2+4)^2$.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 123)

Тексты-метафоры не только придают эмоциональную окраску содержанию изучаемого понятия или явления, но и создают условия для формирования важнейшего умения мыслить с использованием аналогий.

Итак, для определения количества действительных корней квадратного уравнения служит выражение b^2-4ac. Ему дано специальное имя – ***дискриминант*** (от *лат.* discriminantis – различающий, разделяющий).

Дискриминант обозначается буквой $D: D=b^2-4ac$.



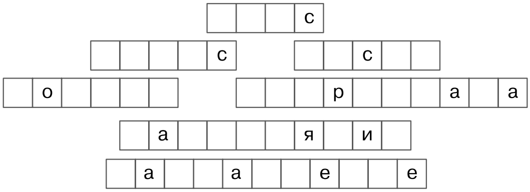
Попробуйте установить аналогию между светофором и дискриминантом.

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 108)

- **Текст – игра**

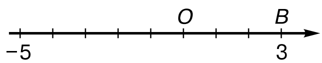
Игровые тексты с включением загадок, математических кроссвордов, дидактических и сюжетно-ролевых игр (в виде «Праздника знаний», «Аукциона» и т. д.) обеспечивают вовлечение учащихся в процесс проверки своих знаний (5–6-е классы). В 7–9-х классах это интеллектуальные игры, связанные с анализом нестандартных ситуаций.

Сыграйте в «Поле чудес» (*актуализация знаний учащихся о положительных и отрицательных числах*).



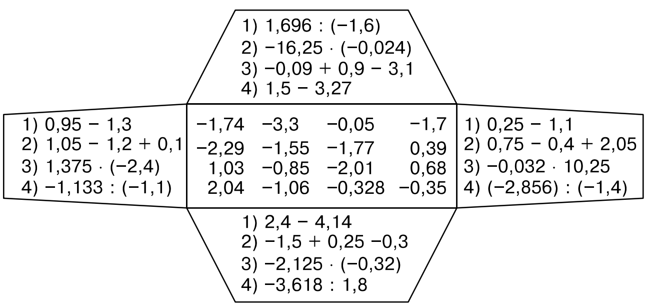
Выигрывает тот, кто не только отгадает слово, но и расскажет о его использовании.

Подсказка (на всякий случай): Все слова можно отгадать, внимательно рассмотрев рисунок:



(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 122)

Игра «Четыре цвета» (*актуализация знаний о положительных и отрицательных числах*). Играют 2, 3 или 4 человека. У каждого по 4 фишки своего цвета. Играющие решают свои примеры и закрывают фишками свои «ответные» поля. Выигрывает тот, кто быстрее использует все фишки. Ответы расположены в центре.

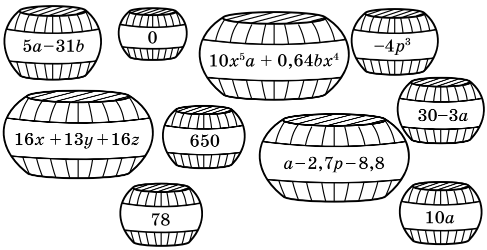


Составьте игру «Действия с дробными числами».

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 163)

Играем в лото (*актуализация знаний о приведении подобных слагаемых*). Сопоставьте каждой карточке лото соответствующий бочонок.

$1+2+3+4+\dots+12$	$8x+7y+9z+y+7x+$ $+z+5y+6z+x$
$5\frac{2}{3}a-2y+4\frac{1}{3}a+2y$	$45-3a-15$
$5xy-6xy^2-5xy+6xy^2$	$2+4+6+8+\dots+50$
$a-b+a-16b+a-$ $-4b+a-8b+a-2b$	$2{,}8a+2{,}9p+10{,}9-4{,}6p-$ $-1{,}8a-3{,}7-p-16$
$7c^2-2p^3-2p^3-7c^2$	$13{,}5ax^5-0{,}96x^4b-0{,}4bx^4-$ $-3{,}5x^5a+2bxxxx$



(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 33–34)

3.5. Когнитивные декларативные схемы

- **Текст – введение фокус-примера**

Фокус-пример – это образ (визуальная когнитивная схема), в котором сосредоточены наиболее существенные признаки соответствующего понятия и который дает возможность составить обобщенное представление о целом классе изучаемых математических объектов. Использование текстов, вводящих фокус-пример понятия, особенно важно на начальных этапах изучения той или иной новой темы. Фокус-пример должен попасть в зону ближайшего развития учащихся, стать основой для инициации их собственных действий по использованию прошлых и новых знаний.

Рассмотрим текст, в котором в качестве фокус-примера понятия «десятичные дроби» вводится видоизмененная таблица разрядов, при этом фокус-пример подчеркивает идею о том, что десятичные дроби записываются в позиционной системе счисления по тому же принципу, что и натуральные числа – значение каждой цифры в записи десятичной дроби зависит от занимаемой ею позиции (в том числе это относится и к десятичным дробям, в которых больше одного знака после запятой).

Интересно, а как десятичные дроби запишутся в Книге? – спросила фрёкен Снорк. – Теми же цифрами, что и натуральные числа, или, может быть, новыми? И тоже в таблице разрядов?

– Если писать их в разрядной таблице, то в ней справа должен появиться новый разряд для десятых, – предположил Муми-тролль.

...

– ...как записать две целых и шесть десятых, – сказала фрёкен Снорк, задумчиво выводя пальчиком цифры на поверхности стола, – может быть, так: 2|6. Или так: 2^6. Или еще как-нибудь?

...

Мы можем продолжать таблицу разрядов в обе стороны всё дальше и дальше:

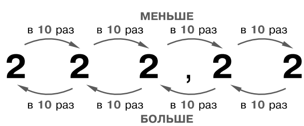
Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	,	Десятые	Сотые	Тысячные	Десятитысячные

Влево за разрядом тысяч идет разряд десятков тысяч, а вправо за тысячными долями – *десятитысячные*. Влево за разрядом десятков тысяч идет разряд сотен тысяч, а вправо за десятитысячными долями – *стотысячные* и так далее.

...Муми-папа предложил записать в таблицу разрядов число 222,22, у которого в целой части стояли три двойки, а в дробной – две двойки. Он считал это число очень красивым. Число в таблицу вписали.

Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	,	Десятые	Сотые	Тысячные	Десятитысячные
	2	2	2	,	2	2		

А Муми-тролль снабдил его запись стрелочками:



(*Заметил, читатель? Для десятичных дробей, как и для натуральных чисел, верно, что если идешь от разряда к разряду вправо, то значение одной и той же цифры уменьшается в десять раз. Идешь влево – увеличивается в десять раз.*)

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 50, 59)

- **Текст – создание фрейма**

Фрейм – это форма хранения знаний о некотором классе объектов (таких как «комната», «лошадь», «одночлен» и т. д.): его «каркас» характеризуют устойчивые, всегда имеющие место отношения между элементами объекта, а «узлы» (или слоты) этого каркаса – вариативные детали данного объекта. Тексты, направленные на создание фрейма, вводят условия для развертывания образа математического объекта с выделением его стабильной и вариативной частей.

Для создания фрейма, связанного с позиционной записью натурального числа, учащимся предлагается рассмотреть системы счисления с разными основаниями и увидеть в них общие и отличительные признаки.

Интересно, – задумался Снусмумрик, – когда Муми-тролль считает десятками, то ему нужно 10 цифр. Когда Муми-тролль считает пятерками, ему требуется всего 5 цифр. А я считаю дюжинами. Выходит, мне нужно использовать 12 цифр?

...

По дороге Ондатр рассуждал о том, что есть еще замечательная позиционная система записи чисел – двоичная... Важно лишь не забывать про то, что при первой же возможности следует объединять предметы в группы («вязать пучки, вязанки и так далее»). И не забывать про позиции цифр.

В заключение Ондатр рекомендовал заполнить придуманную им таблицу.

I	1_2		1_5		1	1_{12}
II		2_3		2_8	2	
III			3_5		3	3_{12}
IIII	100_2		4_5	4_8	4	
IIIII	101_2		10_5		5	5_{12}
IIIIII		20_3		6_8	6	
IIIIIII	111_2		12_5		7	7_{12}
IIIIIIII		22_3		10_8	8	
IIIIIIIII	1001_2		14_5		9	9_{12}
IIIIIIIIII		101_3			10	A_{12}
IIIIIIIIIII			21_5		11	B_{12}
IIIIIIIIIIII	1100_2	110_3	22_5	14_8	12	10_{12}
IIIIIIIIIIIII		111_3	23_5		13	
IIIIIIIIIIIIII	1110_2			16_8	14	12_{12}
IIIIIIIIIIIIIII		120_3	30_5		15	
IIIIIIIIIIIIIIII	10000_2			20_8	16	14_{12}
IIIIIIIIIIIIIIIII		122_3	32_5		17	
IIIIIIIIIIIIIIIIII				22_8	18	16_{12}
IIIIIIIIIIIIIIIIIII	10011_2	201_3	34_5		19	
IIIIIIIIIIIIIIIIIIII				24_8	20	18_{12}

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 21–22)

Формированию фреймов способствуют тексты, содержащие вопросы, позволяющие выделить инвариантные и вариативные характеристики математических объектов. Приведем примеры таких вопросов по теме «Делимость чисел» (6-й класс).

1. Продолжите предложение: «Наименьшее общее кратное двух натуральных чисел – это...».
2. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел:

а) быть равным 0;
б) быть равным 1;
в) быть равным одному из чисел;
г) быть больше каждого из чисел?

Проиллюстрируйте свои ответы примерами.

3. Как найти число, которое делится и на 72, и на 108?
4. Можно ли восстановить числа, если известны их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное?

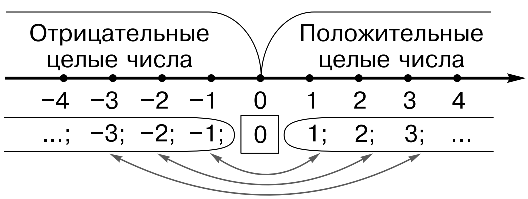
(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 113)

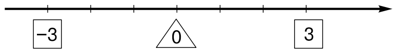
- **текст – конспект**

Тексты этого типа выступают как средство систематизации знаний учащихся. На первых этапах конспект предъявляется в готовом виде. Учащиеся анализируют его и оценивают. Затем текст ориентирует их на составление собственных конспектов с учетом предпочитаемых способов фиксации информации.

Приведем примеры таких текстов (тема «Положительные и отрицательные числа», 5-й класс), которые составлены с одновременным использованием словесно-символических и визуальных средств.

1. Все целые числа можно изобразить так:
2. Противоположные числа 3 и –3; *a* и *–a*:





3. Знак минус «–»:

- знак действия вычитания: $8-6=2$; $6-8=-2$;
- знак отрицательного числа: -5;
- знак числа, противоположного данному: 5 и -5; a и $-a$.

Знак плюс «+»:

- знак положительного числа: $+5$;
- знак действия сложения.

4. Модуль числа a – расстояние на координатной прямой от числа a до 0.

Обозначение: $|a|$.

$$|-3| = 3; \qquad |3| = 3; \qquad |0| = 0.$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \text{ — положительное число или нуль,} \\ -a, & \text{если } a \text{ — отрицательное число.} \end{cases}$$

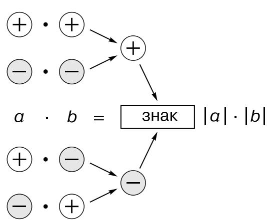
5. Больше – правее на координатной прямой; меньше – левее на координатной прямой.

Всякое положительное число больше нуля и больше любого отрицательного числа ($6>0$; $6>-10$).

Всякое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа ($-7<0$; $-7<1$).

Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше: $-10<-3$, так как $|-10|>|-3|$.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 35)



a · 0 = 0 · a = 0

□ · △ = △ · □

□ · (△ · ○) = (□ · △) · ○

(□ + △) · ● = □ · ● + △ · ●

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 79)

В 7–9-х классах большое внимание уделяется самостоятельной работе учащихся по составлению конспектов и материалов для справочника. Результаты своей работы по подготовке справочника учащиеся могут сверить с тем, что представлено в разделах «Справочник», имеющихся в «Практикумах».

Составьте конспекты на тему «Преобразование рациональных выражений» и «Решение рациональных уравнений». Постарайтесь сделать конспект кратким, но выразительным, чтобы легко было вспомнить материал по заданной теме. Используйте цвет, схемы, примеры, словесные описания – все, что именно вам кажется полезным.

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 16)

3.6. Когнитивные процедурные схемы

- **Текст – алгоритм (процедура)**

Тексты этого типа мотивируют учащихся на поиск алгоритма, создают условия для выявления его оснований, предъявляют визуальные средства хранения полученной информации либо стимулируют деятельность по получению соответствующих графических опор, предлагают задания для освоения процедуры и различных случаев ее использования, в том числе для опознания математических объектов. Текст-алгоритм может включать образцы рассуждений, приводящих к соответствующим способам деятельности и позволяющих осваивать процедурные знания. Работа с такими текстами развивает у учащихся умение строить алгоритмы, представлять их разными способами, придерживаться полученных алгоритмов, искать нужный алгоритм, выявлять его основания.

Приведем пример текста, обеспечивающего мотивацию на поиск и выделение оснований алгоритма деления десятичных дробей, которые постепенно выстраиваются в тексте до формулировки соответствующего правила (5-й класс).

Вы уже умеете делить натуральное число или десятичную дробь на любое натуральное число. Теперь мы должны научиться справляться с делением, когда делителем будет десятичная дробь.

Рассмотрим задачу с практическим содержанием, решение которой приведет нас к такому делению.

Задача. *Для школьного карнавала купили 13,5 м красной и 7,85 м синей ленты. Каждую ленту предполагается разрезать на одинаковые кусочки длиной 0,5 м. Сколько кусочков каждого цвета получится?*

Решение. Найдем количество кусочков красной ленты.

Для этого нужно 13,5 разделить на 0,5:

$13{,}5 : 0{,}5 = ?$

Мы не знаем, как выполнить такое деление, но можем переформулировать условие задачи: красную ленту длиной 135 дм нужно разрезать на одинаковые кусочки длиной по 5 дм.

Теперь мы легко можем найти количество кусочков:

$135 : 5 = 27.$

Проверим: $27 \cdot 0{,}5 = 13{,}5$. Верно.

Итак, красная лента будет разрезана на 27 одинаковых кусочков. Однако для нас сейчас важен не сам ответ, а то, как он получен.

Вместо того чтобы делить 13,5 на 0,5, мы разделили 135 на 5. Получается, что $13{,}5 : 0{,}5 = 135 : 5 = 27$.

Но разве можно одно деление заменять другим?

Давайте посмотрим внимательнее, как изменились числа в действии деления. Делимое и делитель увеличились каждое в 10 раз, и при этом частное не изменилось.

На самом деле этот факт не является для вас новым. Вспомните – в § 10 мы говорили об основном свойстве обыкновенной дроби:

Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то величина дроби не изменится.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{3 \cdot 1000}{4 \cdot 1000} = \ldots .$$

Но в предыдущем параграфе мы убедились, что запись обыкновенной дроби подразумевает деление числителя на знаменатель. Получается, что $3 : 4 = (3 \cdot 5) : (4 \cdot 5) = (3 \cdot 10) : (4 \cdot 10) = (3 \cdot 1000) : (4 \cdot 1000) = \ldots$

Основное свойство обыкновенной дроби – это частный случай более общего *свойства деления:*

Частное не изменится, если делимое и делитель умножить на одно и то же число **(*не равное нулю*):** $\boldsymbol{a : b = (a \cdot m) : (b \cdot m)}$ **(*b и m не равны нулю*).**

Именно это свойство деления дало нам возможность найти число кусочков красной ленты: мы умножили делимое и делитель на 10; от этого частное не изменилось, зато делить пришлось не на десятичную дробь, а на натуральное число.

...

Решение задачи помогло нам найти способ деления на десятичную дробь. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. $1{,}992 : 0{,}24 = ?$

На какое число нужно умножить делимое и делитель, чтобы делитель стал натуральным числом? В записи делителя два знака после запятой, поэтому можно умножить на 100, ведь при умножении на 100 мы переносим запятую в записи числа на два знака вправо:

$$1{,}\underbrace{99}2 : 0{,}\underbrace{24} = 199{,}2 : 24 = 8{,}3.$$

...

Эти примеры показывают, что на практике удобнее говорить не об умножении делимого и делителя на 10; 100; 1000 и так далее, а о переносе запятой в делимом и делителе вправо на одно и то же количество знаков.

Сформулируем правило:

...

(Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 2, 2012, с. 24–26)

Разновидностью текста-алгоритма (процедуры) являются учебные тексты, с помощью которых учащиеся учатся анализировать различные случаи применения алгоритма.

Постоял-постоял Иван в лавке, да и составил правило:

Чтобы из единицы вычесть обыкновенную дробь, надо эту единицу раздробить на доли, в которых дана вычитаемая дробь, а потом найти разность дробей с одинаковыми знаменателями.

Если у дробей знаменатели одинаковые, так их и вычитать легко!

Разность двух обыкновенных дробей с одним и тем же знаменателем равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным разности числителей этих дробей.

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{20-13}{20} = \frac{7}{20}.$$

Для всех ли случаев вычитания годится правило Ивана? Рассмотри наши примеры и на вопросы к ним ответь.

а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; б) $\frac{15}{20} - \frac{2}{20}$; в) $\frac{15}{20} - \frac{4}{20}$; г) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$;

д) $7\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}$; е) $7\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6}$; ж) $7\frac{3}{4} - 2$; з) $3 - \frac{1}{4}$;

и) $3 - 1\frac{1}{4}$; к) $27 - 19$; л) $1{,}37 - 0{,}9$.

Есть ли здесь примеры про:

- вычитание дробей с одинаковыми знаменателями;
- вычитание дробей с разными знаменателями;
- вычитание целого числа из смешанного;
- вычитание дроби из целого числа;
- вычитание смешанного числа из смешанного?

Какие еще случаи вычитания здесь есть?

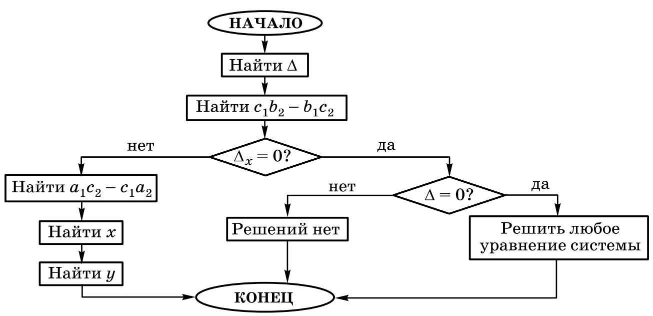
(*Выполняя вычитание, помогай себе рисунками – проверяй вычитание сложением. Какой случай показался тебе самым трудным? Попробуй составить правило вычитания любых положительных рациональных чисел.*)

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 83)

Одним из способов фиксации шагов алгоритма является его представление в форме блок-схемы. На формирование этого умения ориентирован следующий текст.

Некто составил алгоритм решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$



Уверены ли вы в правильности алгоритма? Если нет, то как исправить алгоритм? Составьте на основе правильного алгоритма компьютерную программу для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными и решите с ее помощью пяти систем уравнений из предыдущих заданий.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 132)

По мере накопления опыта использования и самостоятельного составления алгоритмов учащиеся средствами учебных текстов включаются в более сложные виды алгоритмической деятельности.

Приведем пример текста, направленного на формирование алгоритма построения графика линейной функции (9-й класс).

Рассмотрим способы построения графика линейной функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Способ первый

Графиком линейной функции является прямая, значит, для построения графика линейной функции достаточно определить две точки, принадлежащие ему.

Вычислим значения функции при $x = -2$ и $x = 4$:

$y(-2) = 2$; $y(4) = -1$.

Следовательно, точки $A(-2; 2)$ и $B(4; -1)$ принадлежат графику функции. Соединяя прямой найденные точки, получим искомый график (рисунок 38).

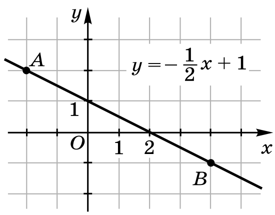


Рис. 38

Способ второй

В качестве двух точек, определяющих прямую $y = -\frac{1}{2}x + 1$, можно взять точки пересечения графика с осями координат.

Найдем их.

$x = 0$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1$, $y = 1$; точка M (0; 1) графика лежит на оси Oy.

$y = 0$, $0 = -\frac{1}{2}x + 1$, $x = 2$; точка N (2; 0) графика лежит на оси Ox.

Получили две точки пересечения прямой с осями координат M(0; 1) и N(2; 0). Проведем прямую, проходящую через точки M и N, получим график функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (рисунок 39).

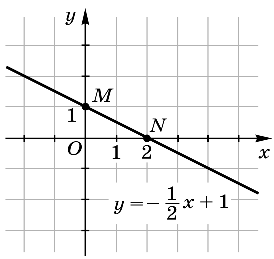


Рис. 39

Способ третий

График функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$ пересекает ось ординат в точке M(0; 1). Значения этой функции убывают со скоростью $\frac{1}{2}$.

От точки M «пройдем» вправо на 1 и опустимся на $\frac{1}{2}$. Построим точку P (рисунок 40). Проведем прямую через построенные точки M и P. Прямая MP – график функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

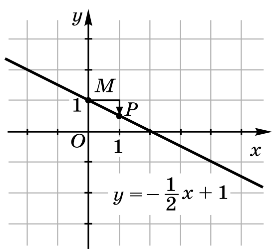


Рис. 40

Постройте график линейной функции:

а) $y = -5x + 3$; б) $y = 2x - 4$; в) $y = \frac{1}{3}x + 2$; г) $y = -\frac{2}{5}x - 1$.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 50)

Решите систему линейных уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} -x + y = -2, \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Восстановите правильный порядок действий:

- Решить уравнение с одним неизвестным.
- Выразить одно неизвестное через другое в одном из уравнений.
- Подставить полученное выражение для неизвестного в другое уравнение.
- Подставить найденное значение неизвестного в одно из уравнений системы и найти значение другого неизвестного.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 119)

- **Текст – операция**

Тексты этого типа предоставляют возможность не только обобщить знания об известных математических операциях и познакомиться со свойствами алгебраической операции, но и конструировать математические операции с новыми свойствами (что вполне по силам учащимся 7-го класса).

Ранее вы уже изучали арифметические действия, такие как сложение, вычитание, умножение и деление чисел, рассматривали свойства этих действий. А возможно ли обобщить понятие арифметического действия, рассмотреть действия не только с числами или придумать какие-либо другие действия с числами? Какими свойствами должны обладать такие «новые» действия?

Давайте попробуем выделить существенные свойства арифметических действий.

Рассмотрим, например, сложение натуральных чисел. Если мы возьмем пару чисел, например 2 и 5, то сможем найти их сумму $2+5 = 7$. Говорят, что задано соответствие: паре натуральных чисел a и b ставится в соответствие их сумма $a+b$.

Можно рассмотреть и другие примеры соответствий, например, такой: паре натуральных чисел a и b ставится в соответствие их общий натуральный делитель. Например, числам 6 и 12 ставится в соответствие число 3 или число 2.

Чем отличаются эти два примера? В первом случае, при сложении, число, которое ставится в соответствие паре чисел, определяется однозначно, во втором случае таких чисел может быть несколько. Очевидно, что арифметические операции обладают свойством ***однозначности***.

Рассмотрим теперь действие вычитания. Если мы возьмем два любых целых числа, то их разность будет целым числом. Мы можем сказать, что действие вычитания задано на множестве целых чисел. *Любой упорядоченной паре* целых чисел соответствует их разность, причем эта разность также *является целым числом*. Говорят, что множество целых чисел Z ***замкнуто*** относительно вычитания.

Что изменится, если мы будем рассматривать вычитание *натуральных чисел?* Будет ли множество натуральных чисел N *замкнуто* относительно операции вычитания? Иными словами, для любой ли пары натуральных чисел можно найти их разность, которая являлась бы натуральным числом? Очевидно, ответ на этот вопрос отрицательный. Например, для чисел 2 и 5 нельзя найти среди натуральных чисел их разность. Мы можем найти разность этих чисел во множестве целых чисел: $2-5=-3$. Но число -3 не является натуральным числом.

...

Определение. Будем говорить, что на множестве M чисел задана ***алгебраическая операция*** ⋆, если любой упорядоченной паре чисел x, y из M ставится в соответствие однозначно определенное число z из M, которое обозначим $z=x\star y$.

...

Рассмотрим операцию «звездочка» ⋆, определенную на множестве чисел M= {0, 1, 2, 3, ..., 8, 9} с помощью таблицы.

⋆	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Например, $3\star 4$, то есть «3 звездочка 4», равно числу, стоящему на пересечении строки с номером 3 и столбца с номером 4. Следовательно, $3\star 4=2$.

Задание 1. Присмотритесь к таблице и разгадайте, как она составлена, другими словами, сформулируйте правило ее заполнения.

...

Задание 6. Являются ли алгебраическими операции сложения и умножения на множестве: а) четных чисел; б) нечетных чисел?

...

Задание 10. Придумайте несколько своих примеров операций над числами. Выясните, какие из них будут алгебраическими операциями, какими свойствами они будут обладать.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 47–48)

3.7. Семантика математического языка

- **Текст – значение термина**

Тексты этого типа помогают формировать индивидуальную систему значений, характеризующую содержательный аспект интеллекта. Один из методических приемов конструирования таких текстов – прямое обсуждение его значения, в том числе за счет сведений о происхождении определенных терминов и их появления и развития в истории математики. Особенно важно обсуждать значение термина в тех случаях, когда он является предметом условных соглашений (например, при введении десятичных дробей с двумя, тремя и т. д. знаками после запятой полезно обсудить, почему эти дроби тоже называют *десятичными*).

Запишем это число в разрядную таблицу на плакатике:

Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	,	Десятые	Сотые
			0	,	8	3

Получилось число *нуль целых восемь десятых три сотых* – число, в котором после запятой две цифры, так что у нас уже есть два разряда вправо от запятой.

Выходит, что мы получили новый сорт дробей – сотенные дроби? – спросила фрёкен Снорк.

– Зачем лишние слова! – недовольно возразил Ондатр. – Такое число тоже называют десятичной дробью. Оно имеет на это название полное право – ведь одна сотая получается при дроблении одной десятой именно на десять!

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 55)

В средневековых торговых книгах, если прибыль составляла $\frac{19}{100}$ от вложенной суммы, писали «девятнадцать со ста». «Со ста» на латинском языке будет «pro centum». С течением времени латинское «pro centum» превратилось в «pro cento», потом в «procent». В русский язык вошло слово «процент».

(Математика: учебник для 6 класса, 2012, с. 150)

О том, как в алгебру пришло слово «корень»

Удивительному проникновению в математику ботанического слова «корень» мы обязаны особенностям последовательного перевода одного слова на другие языки. Греческие математики, размышляя о квадратном корне из 2, рассматривали квадрат, его диагональ и основание.

«Основание» – по-гречески «базис» (это слово в форме «база» вошло во многие языки). Греки решали задачу: найти базис квадрата, зная его площадь. Например: площадь квадрата составляет две единицы; каково его основание, каков его базис?

Но в греческом языке слово «базис» означало не только основание чего-нибудь, например дома, укрепления, квадрата, но и основу, как, например, корень растения.

В VIII веке арабский переводчик, прочитав в греческой рукописи слово «базис», перевел его не как «основание», а как «корень», по-арабски – «джазр». В арабском же языке слово«джазр» имеет только одно значение – корень, по-латыни radix, что по-русски также означает «корень». Мы и сейчас говорим «радикальные изменения», имея в виду изменения важные, коренные. Кстати, один из «съедобных корней» по-русски называется чуть искаженным латинским словом radix – редис.

В XIX веке неточность перевода была установлена французскими историками науки. Конечно, исправлять эту неточность уже не имеет смысла – все привыкли «извлекать корень», не очень задумываясь о буквальном смысле этих слов.

Как просто сейчас звучит: «корень четвертой степени» или «корень пятой степени». У арабов всего 12 веков тому назад это звучало гораздо внушительнее: ребро квадрато-квадрата, ребро квадрато-куба. (Арабы использовали кроме термина «джазр» еще термин «дил». Русский перевод этого слова и есть «ребро».)

Задание 1. Найдите в словарях как можно больше значений слова «корень». Есть ли в них что-нибудь общее?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 48–49)

- **Текст – систематизация значений терминов**

Важную роль в обогащении понятийного опыта играют тексты, которые направлены на осознание учащимися связей между значениями разных терминов, так как они составляют основу для последующего установления связей между понятиями.

Приведем примеры двух текстов для учащихся 7-го класса по теме «Одночлены», в которых систематизируются знания о различных значениях термина «одночлены».

1) Из одночленов $2xy$; $6x^2 \cdot \frac{1}{2}xy^3p$; $-5xy$; $-3x^5y^5p$; $3a^2b$; a^5; $3x^5y^2 \cdot 0{,}3x^2y$ выпишите:

   а) одночлены стандартного вида;

   б) одночлены нестандартного вида (приведите их к стандартному виду);

   в) подобные одночлены.

   Укажите степень каждого одночлена.

2) Приведите примеры:

   а) одночленов;

   б) выражений, не являющихся одночленами;

   в) подобных одночленов;

   г) одночленов, не являющихся подобными;

   д) одночленов стандартного вида;

   е) одночленов нестандартного вида;

   ж) одночленов степени 5.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 60)

Заполните таблицу.

Одночлен	**Коэффициент**	**Буквенная часть**	**Степень одночлена**	**Стандартный вид**	**Пример подобного одночлена**
$5a^5b^5$	5		10	$5a^5b^5$	$-2a^5b^5$
$-\frac{3}{4}ax \cdot \left(-\frac{5}{6}ax^3\right)$		a^2x^4			
	6	$x^5y^4z^3$	12		
$\ldots a^3b \cdot 2{,}5a^2b^2$	6		8		

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 25)

- **Текст – перевод с родного языка на язык математики**

Важным аспектом усвоения математического языка является развитие способности переводить информацию с родного языка на язык математики, что способствует обогащению семантического опыта ученика.

Приведем примеры текстов, где такой перевод становится предметом специального изучения (6 класс).

Заполните пропуски:

Словесная запись	**Символическая запись**
1) a на 70 больше b	...
2) b на 4 меньше a	...
3) a в 70 раз больше b	...
4) a меньше b на 37	...
5) ...	$a = b + 17$
6) ... a равно $17b$	...
7) ...	$b = 17a$
8) Одно число больше другого на 7	...
9) Одно число больше другого в 7 раз	...
10) Сумма двух чисел равна 37,5	...
11) ...	$27 - x = 15$
12) Произведение двух чисел равно 15,213. Сумма двух чисел равна 75,15, причем одно из них в 4 раза больше другого	...
13) Скорость сближения автомобиля и велосипедиста, если скорость автомобиля 70 км/ч, а скорость велосипедиста x км/ч	...
14) Скорость катера по течению реки, если собственная скорость катера 42 км/ч, а скорость течения реки x км/ч	...
15) Собственная скорость катера, если скорость течения реки 5 км/ч, скорость катера против течения x км/ч	...
16) Число, которое на 47 больше числа, ему противоположного	...

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 147)

Следующий текст адресован учащимся 8-го класса. Он направлен на формирование умения видеть, каким образом изменение словосочетаний в тексте сюжетной задачи может влиять на уравнение, с помощью которого она может быть решена. При этом учащиеся привыкают работать в режиме вариативности исходных данных (в тексте варьируются способы решения, исходные данные, вопросы к задаче).

Мотоциклист хотел проехать от пункта А до пункта В за определенное время. Проехав 54 км, он остановился на 5 минут, поэтому на оставшихся 36 км пути он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл в пункт В вовремя. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

Эту задачу можно решить с помощью любого из трех уравнений:

1) $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+6} = \frac{1}{12}$; 2) $\frac{54}{x} + \frac{1}{12} + \frac{36}{x+6} = \frac{54+36}{x}$;

3) $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+\frac{1}{12}} = 6$.

- Какая величина принята за неизвестную x в каждом уравнении?
- Что в условии задачи послужило основой для составления каждого из уравнений?
- Какое из уравнений вы бы выбрали для решения задачи?
- Есть ли в условии задачи лишние данные?
- Какие из трех данных уравнений изменятся и как изменятся, если станет известно, что:

а) до остановки мотоциклист проехал 72 км;

б) после остановки мотоциклист проехал 28 км;

в) путь после остановки не указан;

г) мотоциклист остановился на середине пути?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 137–138)

3.8. Выявление признаков понятий и установление связей между понятиями

- **Текст – выявление признаков понятия**

Тексты этого типа создают условия для выявления признаков понятий, которые фиксируются с помощью разных способов кодирования информации, уточняются и формулируются. В тексты включаются задания, которые обеспечивают формирование умения устанавливать наличие или отсутствие у данного математического объекта определенного признака, оценивать полноту признаков.

Для работы с признаками понятия «число корней квадратного уравнения» учащимся предлагаются тексты, в которых ставится цель выделить признаки данного понятия (8-й класс).

Какие из следующих уравнений, на ваш взгляд, не имеют действительных корней:

а) $x^2 - 12x - 64 = 0$; б) $10x^2 - 3x + 1 = 0$; в) $100 - 20x - x^2 = 0$;
г) $2x^2 - 16x + 18 = 0$; д) $2x^2 - 3 - 7x = 0$?

Можете ли вы ответить на этот вопрос, не решая уравнений?

Постарайтесь сформулировать и обосновать гипотезу о том, как определить наличие действительных корней у квадратного уравнения.

При поиске гипотезы предлагаем вернуться к выводу формулы корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. Проанализируйте уравнение $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, равносильное исходному. При каком условии значение правой части этого уравнения положительно? Отрицательно? Равно нулю?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 103)

Следующие три текста помогают формировать умение устанавливать наличие или отсутствие у данного объекта определенного признака.

Задание 5. Даны уравнения:

а) $\dfrac{2x+3}{5}=0;$	б) $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{4}{x+4};$
в) $6x^2-13=0;$	г) $-3x^2+\sqrt{5x}=0;$
д) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+4=0;$	е) $x^2+3x-14=0;$
ж) $ax^2+5x-7=0,\ a\neq 0;$	з) $(5+x)(x-4)=7;$
и) $(x-5)^2-25=0;$	к) $8x^2=4;$
л) $(20-x)x=96;$	м) $x^2+3x-14=0;$
н) $5x^4-2x^2-3=0;$	о) $(a^2+1)x^2+a=0,$ a — некоторое число.

Какие из уравнений являются:

а) рациональными, иррациональными;
б) целыми рациональными, дробными рациональными;
в) квадратными;
г) могут быть приведены к виду $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 96)

По какому признаку разделены на две группы неполные квадратные уравнения?

I группа	**II группа**
$6x^2+3x=0;$	$3x^2+10=0;$
$\frac{1}{4}x^2-25=0;$	$5x^2+36=11.$
$3x^2=30;$	
$0{,}7x^2=0.$	

Допишите по одному уравнению в каждую группу.

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 70)

Приведите примеры корней, значения которых можно записать:

а) натуральным числом;
б) обыкновенной дробью;
в) конечной десятичной дробью;
г) бесконечной периодической десятичной дробью;
д) бесконечной непериодической десятичной дробью;
е) действительным числом.

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 28)

Наконец, важную роль играют тексты, которые помогают учащимся осознать полноту признаков изучаемого понятия, а также «восстановить» объект по некоторому набору наиболее важных признаков.

О числе 2 можно сказать, что оно действительное, рациональное, целое, натуральное, положительное.

Дайте характеристику числу:

а) 2,121212...; б) $-\sqrt{2}$; в) 2,121121112...

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 23)

Если возможно, то в каждом из следующих случаев восстановите квадратичную функцию по ее заданным свойствам, если нет – то дополните список свойств функции так, чтобы ее можно было бы восстановить.

1. Функция четна и имеет наименьшее значение, равное −8.
2. Вершина параболы находится в точке (–10; 0). Функция возрастает только при отрицательных значениях аргумента.
3. Нули функции −3 и 5, наибольшее значение равно 8.
4. Функция отрицательна только на интервале (10; 16) и ее график может быть получен переносом параболы $y = \frac{1}{3}x^2$.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 100)

- **Текст – оценка и выбор признаков понятия**

Тексты этого типа позволяют соотнести частные и общие признаки понятия, сравнить сходные и отличительные признаки математических объектов, оценить степень существенности тех или иных признаков применительно к содержанию решаемой задачи. Такие тексты включают задания с недостающими либо избыточными данными.

Приведем пример текста, формирующего у учащихся умение выбирать из множества признаков квадратичной функции те, которые важны для ответа на вопрос: «При каких значениях неизвестного значения функции неположительны (график функции лежит не выше оси абсцисс)?».

Задание 5. Решите неравенство $x^2-10x+24\leqslant 0$, используя свойства квадратичной функции.

Какая информация о соответствующей квадратичной функции при этом будет полезна:

а) знак коэффициента a;
б) знак дискриминанта D квадратного трехчлена;
в) направление ветвей параболы;
г) точки пересечения параболы с осью абсцисс;
д) координаты вершины параболы;
е) примерное расположение параболы относительно оси абсцисс?

Обязательно ли для решения неравенства строить график соответствующей квадратичной функции? Если да, то с какой точностью выполнить построение?

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 110)

К текстам, направленным на оценку признаков понятия, относятся тексты, в которых требуется сравнить признаки по определенным основаниям либо оценить степень их существенности.

Опишите свойства функции $y=\frac{16}{x}$ и $y=-\frac{16}{x}$ (область определения, нули функции, четность–нечетность, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности). Какими общими свойствами обладают эти функции и чем они отличаются друг от друга?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 67)

Какие из следующих выражений могут быть преобразованы по формуле полного квадрата? Выделите признаки таких выражений.

а) $x^2+2xy+y^2$;
б) $(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2$;
в) $x^2+2x^2y^2$;
г) $0{,}7^2+0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}3^2$;
д) b^2+3^2+6b;
е) $2\cdot 5a+a^2+5^2$;
ж) $(a-1)^2-2\cdot\frac{1}{3}(a-1)+\left(\frac{1}{3}\right)^2$;
з) $71^2+2\cdot 71(-29)+(-29)^2$;
и) $a^3+2a^2b+b^3$;
к) $9a^2-6ab-b^2$;
л) $6c^2+56c+49$.

Например, преобразуем многочлен $4b^2+4bc^3+c^6$ так:

$$4b^2+4bc^3+c^6=(2b)^2+2\cdot 2b\cdot c^3+(c^3)^2.$$

Следовательно, его можно преобразовать по формуле полного квадрата.

Ученик, выполняя это задание, выписал признаки выражений, которые могут быть преобразованы по формуле полного квадрата.

1. Выражение должно состоять из трех слагаемых (или может быть представлено как сумма трех слагаемых).
2. Два из них представляют собой (или могут быть представлены как) квадраты.
3. Третье слагаемое – удвоенное произведение оснований найденных квадратов.
4. Знак перед каждым квадратом обязательно «+».
5. Знак удвоенного произведения может быть любым.
6. На первом месте стоит квадрат одного из слагаемых, на втором – удвоенное произведение слагаемых, на третьем – квадрат другого слагаемого.

Какие из перечисленных признаков существенны для преобразования выражений с помощью формулы полного квадрата, а какие являются несущественными?

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 105–106)

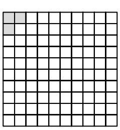
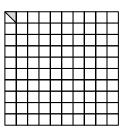
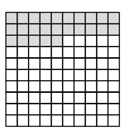
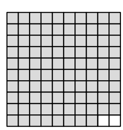
- **Текст – установление связей между понятиями**

Тексты этого типа ориентируют на установление родо-видовых связей между понятиями, которые позволяют осознать понятия как единую понятийную систему, включающую как видовые, так и родовые категории. Тексты дают возможность включить новое понятие в уже известную систему понятийных связей и показать, как новое понятие изменяет ранее усвоенные внутрипредметные связи. Особое значение имеют тексты, обеспечивающие соотнесение изучаемых математических понятий с понятиями из других областей знаний.

Приведем примеры текстов, которые помогают учащимся увидеть родо-видовые связи между различными понятиями курса математики.

Первый текст посвящен установлению связей между родовым понятием «рационального числа» и его различными представлениями.

Рассмотрите модели:

а)  б)  в)  г) 

Изучите образец заполнения таблицы.

Модель	Дроби		Отношение	Процент закрашенной фигуры
	обыкновенные	десятичные		
а)	$\frac{3}{100}$	0,03	3 : 100	3%

Продолжите таблицу для моделей б) в) г) и случаев, когда закрашенная часть составляет от всей площади: д) 75%; е) $\frac{2}{5}$; ж) 2,5; з) 3 : 20. Предложите свои примеры.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 184)

Следующее задание устанавливает связь между различными способами изменения одной и той же величины.

1) Цена снизилась в два раза. На сколько процентов снизилась цена? Сделайте рисунок.
2) Цена возросла вдвое. Сколько процентов составляет новая цена от старой? На сколько процентов возросла цена? Сделайте рисунок.

Во сколько раз уменьшилась стоимость товара, если она понизилась на: а) 80%; б) 75%; в) 60%?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 190)

Следующие два текста актуализирует связи между понятиями «функция» – «частные виды функций».

Исследуем свойства прямой пропорциональности. Сделаем это, придерживаясь общей схемы исследования любой функции:

1) область определения;
2) четность или нечетность;
3) нули;
4) промежутки знакопостоянства;
5) промежутки монотонности;
6) наибольшее и наименьшее значения.

При исследовании свойств 1–6 изучаются и свойства графика функции.

Исследования начнем с рассмотрения конкретной функции данного вида...

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 42)

1) Постройте график функции $y=kx+b$, если

   а) $k=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$; б) $k=\frac{1}{2}$, $b=0$;

   в) $k=0$; $b=-\frac{1}{2}$; г) $k=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$;

   д) $k=0$, $b=0$.

2) В каких случаях вы получили график прямой пропорциональности?
3) Укажите, какое из утверждений является верным:
   а) всякая прямая пропорциональность является линейной функцией;
   б) всякая линейная функция есть прямая пропорциональность.
4) Какими свойствами прямой пропорциональности обладает линейная функция?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 53)

Установлению связей между различными степенными функциями способствует следующий учебный текст.

Для каждой функции из таблицы отметьте знаком «+» те свойства, которыми данная функция обладает.

Свойства / Функции	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{\frac{1}{3}}$	$y=x^{-1}$	$y=x^{-2}$	$y=x^{-\frac{1}{2}}$
Область определения — множество $\mathbb{R}$								
Область определения — множество $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$								
Нечётная								
Чётная								
Если $x>0$, то $y(x)>0$								
$y(0)=0$								
$y(1)=1$								
Возрастающая на всей области определения								
Убывающая на всей области определения								
Возрастающая на интервале $(0;+\infty)$								
Убывающая на интервале $(0;+\infty)$								
Возрастающая на интервале $(-\infty;0)$								
Убывающая на интервале $(-\infty;0)$								
Принимает наименьшее значение при $x=0$								

Что общего вы бы отметили у всех этих функций? Чем они различаются? На какие группы вы бы разбили эти функции и по какому признаку? Чем полезен ваш способ разбиения?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 106)

Средствами специальных текстов учащиеся осваивают связи между понятиями «функция», «уравнения», «неравенства».

Заполните таблицу, переводя с одного языка на другой:

На языке квадратных уравнений или неравенств второй степени	**На языке квадратичной функции**
Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$	
Неравенство $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	График функции $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ не пересекает ось Ox
	Найти абсциссы точек пересечения графиков функций $y=2x^2$ и $y=2x+5$
	График квадратичной функции пересекает ось абсцисс в точках $A(-3; 0)$ и $B(2; 0)$
Один из корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен нулю	
	Функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только отрицательные значения
	Вершина параболы $y=ax^2+bx+$ $+c$ находится в начале координат
Неравенство $ax^2+bx+c>0$ не имеет решений	

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 168)

Использование текстов на соотнесение изучаемых математических понятий с понятиями из других областей знаний способствует росту системности понятийного мышления учащихся и формированию категориальной «сетки» понятий разной степени общности.

Приведем пример учебного текста, который способствует переводу содержания понятия «линейная функция» (координаты точки, принадлежащей графику функции; скорость изменения функции; нули функции; пересечение графиков функций) на язык соответствующих физических понятий (положение тела в данный момент времени; скорость движения; направление движения; начало движения; время движения; место встречи объектов) (9 класс). Подчеркнем, что и в этом тексте учащиеся имеют дело с информацией, представленной в вариативной форме и требующей от ученика готовности оперативно принимать решения с учетом различных аспектов одной и той же задачи.

На рисунке 53 даны графики движения двух пешеходов, велосипедиста и мотоциклиста по одной и той же дороге, вдоль которой расположены населенные пункты. На оси абсцисс начало отсчета соответствует 12 часам дня, на оси ординат – деревне Центральная.

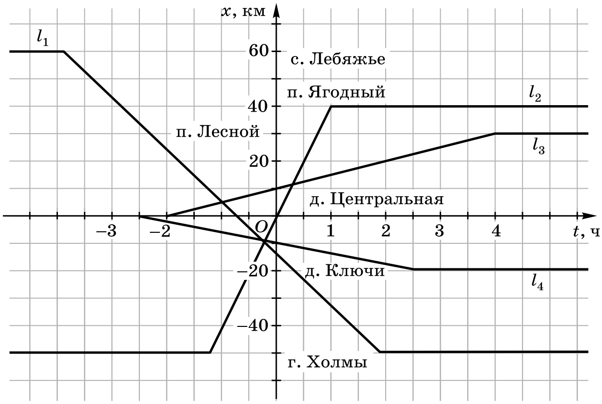


Рис. 53

Ответьте на следующие вопросы и выполните задания:

1) Укажите, какой из графиков описывает движение велосипедиста, какой – движение мотоциклиста, а какие соответствуют движению пешеходов.
2) Укажите в каждом случае направление движения по дороге. Все ли участники двигались в одном направлении?
3) Кто из участников начал движение в 10 часов утра?
4) Сколько времени находился в пути мотоциклист?
5) Кто закончил движение в половине третьего? Куда он прибыл?
6) Сколько времени понадобилось велосипедисту, чтобы добраться до деревни Центральная?
7) Кто начал движение одновременно с велосипедистом?
8) Кого встретил на своем пути каждый из пешеходов? Когда и где произошли эти встречи?
9) Двое участников начали движение из одного и того же пункта. Кто это был?
10) Какое расстояние проехал мотоциклист?
11) Укажите, кто и где находился в пятнадцать минут второго.
12) Укажите, в какие моменты времени мотоциклист проезжал через населенные пункты?
13) Какое расстояние было между велосипедистом и мотоциклистом в час дня?
14) Какой из пешеходов вышел в путь раньше и на сколько минут? Кто из них шел быстрее?

15) Сколько километров в час преодолевал каждый участник движения?
16) Сколько времени потребовалось мотоциклисту, чтобы догнать одного из пешеходов?
17) Для каждого участника движения укажите промежуток времени, в течение которого он находился в пути.
18) Найдите скорость каждого участника движения.
19) В каких пунктах побывали пешеходы; велосипедист; мотоциклист?
20) Скажите, где каждый из участников движения находился в полдень.
21) Найдите для каждого участника функцию вида $s = s(t)$, описывающую его движение. Укажите множество значений каждой функции $s = s(t)$.
22) Какой физический смысл имеют коэффициенты k и b этих функций?

В каких вопросах речь идет фактически об одном и том же?

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 59)

Для формирования категориальных структур недостаточно выделить признаки понятия и установить связи между понятиями разной степени общности. Необходимо обеспечить содержательное наполнение соответствующей категориальной структуры. Для этого отдельные учебные тексты должны быть выстроены таким образом, чтобы учесть определенные фазы движения мысли в процессе образования понятия, такие как *мотивировка, категоризация, обогащение, перенос, свертывание.*

- **Текст – мотивировка нового понятия**

Текст-мотивировка создает условия для осознания учащимися того факта, что их прошлый математический опыт недостаточен для описания и понимания новой ситуации, которая должна быть взята либо из жизненного опыта учеников, либо их прошлого арифметического, алгебраического, физического или какого-либо другого учебного опыта.

Рассмотрим тексты, которые мотивируют изучение понятий разными способами. Например, текст, с помощью которого учащиеся подходят к понятию «проценты», начинается с решения текстовой задачи (6-й класс). Эта задача обращена к математическому опыту учащихся, связанному с поиском простого способа сравнения отношений. В ее содержании воспроизведен контекст, который исторически привел к понятию «проценты»: «процент» (procento – ста) есть прибыль, получаемая с каждых ста рублей капитала, отданного на определенный срок времени.

Пришел казначей к царю с докладом. Собрались, мол, купцы за морским товаром: шелками, пряностями, мехами, драгоценностями. Чтобы купить товар, трое из них хотели взять взаймы одну и ту же сумму с возвратом на определенных условиях.

Один купец обещал с каждого тюка товара стоимостью 2200 рублей вернуть, кроме долга, еще 88 рублей.

Другой – с каждой единицы товара стоимостью 1300 рублей обещал вернуть эти 1300 да еще 39 рублей.

Третий купец за каждые занятые 100 рублей обещал вернуть на 5 рублей больше.

Выслушал казначея царь и говорит:

– Дай денег только одному купцу. Тому, от которого казне моей царской наибольшая выгода будет. (*Скажи, читатель, какой купец деньги в долг получил?*)

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 105)

Мотивация изучения нового понятия может осуществляться средствами текстов, в которых демонстрируется невозможность выполнения какого-либо действия на основе «старых» знаний (например, невозможность выполнить операцию сложения одночленов на множестве одночленов приводит к понятию «многочлены»).

Рассмотрим, какие алгебраические выражения могут получаться при сложении одночленов: одинаковых, подобных, неподобных.

Выполним сложение *одинаковых* одночленов.

Например: $3ab+3ab+3ab+3ab=4 \cdot 3ab=12ab$.

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ \text{раз}}=na.$$

Сложение одинаковых одночленов свелось к умножению одночлена на число, равное количеству слагаемых. В результате снова получается одночлен.

Посмотрим, какое алгебраическое выражение получится, если сложить *подобные одночлены* с различными коэффициентами.

Например:

а) $2a + a = 2 \cdot a + 1 \cdot a = (2 + 1)a = 3a$;
б) $2ab^2x^3 + 4ab^2x^3 = (2 + 4)ab^2x^3 = 6ab^2x^3$;
в) $2cx^2y + \left(-\frac{1}{3}cx^2y\right) = \left(2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) cx^2y = \left(1\ \frac{2}{3}\right) cx^2y$;
г) $2ac^2d + (-2ac^2d) = (2 - 2)ac^2d = 0 \cdot ac^2d = 0$.

...

Итак, при сложении подобных одночленов снова получились одночлены.

Перейдем к сложению *неподобных одночленов,* например, выполним сложение одночленов $16x^2y$ и $18x^3y$.

Получим алгебраическое выражение $16x^2y+18x^3y$, которое уже не является одночленом. Более того, преобразовать его в одночлен невозможно. Таким образом, в результате сложения одночленов получилось алгебраическое выражение нового вида. Оно имеет свое имя – многочлен, или полином (от *гр.* поли – много, номос – часть).

Определение. Сумма одночленов называется ***многочленом*** (или полиномом). Каждый одночлен считается многочленом.

Например, алгебраические выражения $3x^2y$, 7, $x+y$, $a^2b+ab+b^2$, 0 являются многочленами...

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 70–71)

Мотивирующую функцию выполняют тексты, в которых учащимся предлагается описать реальные ситуации, используя алгебраический язык (на примере понятия многочлена).

а) Масса груза составляет 5 т и 4 кг. Запишите его массу в килограммах.
б) Масса груза равна y т и z кг. Запишите его массу в килограммах.
в) Пассажир был в пути a суток и b часов. Сколько часов заняла у него поездка?
г) Представьте число 634 в виде суммы разрядных слагаемых.
д) Запишите число, содержащее c сотен, d десятков, e единиц, если c, d, e – цифры.
е) Запишите площадь фигуры, изображенной на рисунке 14.

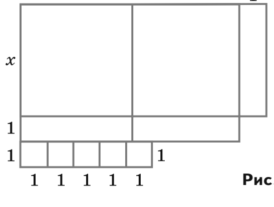


Рис. 14

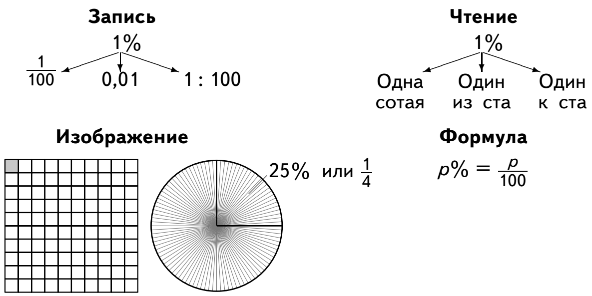
Конечно, вы заметили, что во всех рассмотренных заданиях встретилось сложение чисел и букв...

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 69)

- **Текст – категоризация понятия**

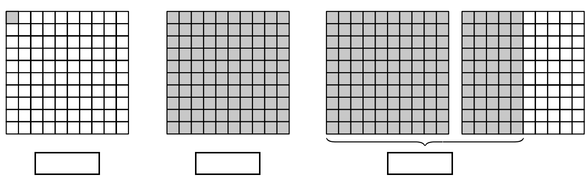
Этот тип текста позволяет ввести знаковое обозначение математического объекта и его словесно-символическое описание (в виде определения, формулы), а также его визуальную модель (образный фокус-пример). Кроме того, с его помощью осуществляется выделение отличительных (частных и общих), несущественных и существенных признаков изучаемого понятия.

Приведем примеры текстов, которые способствуют категоризации понятия «процент» и «формула квадрата суммы» (вводится запись формулы, название формулы, чтение, схема).



Рассмотри рисунки и заполни пустые окошки.

Сделай свои рисунки и закрась 10%, 25%, 33%, 57,5% квадрата.



(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 107)

Запись формулы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Название формулы: **формула квадрата суммы.**

Чтение формулы: Квадрат суммы двух алгебраических выражений равен квадрату первого слагаемого плюс удвоенное произведение первого и второго слагаемых плюс квадрат второго слагаемого.

Схема формулы:

$$(\square+\bigcirc)^2=\square^2+2\square\bigcirc+\bigcirc^2.$$

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 99)

Следующий текст ориентирован на выделение отличительных признаков выражений, которые могут быть преобразованы с помощью данной формулы.

Задание 7. Выпишите выражения, которые можно преобразовать с помощью формулы квадрата суммы.

а) $(x-3)(x-3)$;	б) $(2a-5{,}7b)2a$;
в) $(a-5)(a+5)$;	г) $(1-a)^4$;
д) $(x^2+y^2)^2$;	е) $(d-2)(2-d)$;
ж) $(3m+4n)^2$;	з) $(1{,}2-5xy^6)^2$;
и) $(5a-2b+6c)(6c+5a-2b)$;	к) $(-5m-2{,}2n)^2$.

По каким признакам можно определить, что выражение может быть преобразовано с помощью формулы квадрата суммы?

Составьте памятку для распознавания тех выражений, которые являются квадратами суммы. Сравните свою памятку со следующей.

Алгебраическое выражение преобразуется по формуле квадрата суммы $(\square+\bigcirc)^2=\square^2+2\square\bigcirc+\bigcirc^2$, если выполняются два условия:

1) выражение представляет собой (или может быть представлено как) степень с показателем 2;
2) основание степени есть (или может быть представлено как) сумма двух выражений.

Составьте два алгебраических выражения, которые можно преобразовать по формуле квадрата суммы.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 101)

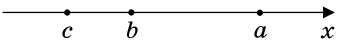
- **Текст – обогащение содержания понятия**

На этой фазе образования понятия средствами текста выделяются дополнительные признаки понятия; оно анализируется в контексте разных ситуаций; рассматриваются его частные случаи и связи с другими понятиями; предлагаются разные варианты использования данного понятия и т. д.

Предлагаем вам рассмотреть несколько ситуаций, изучение которых может привести к ряду вопросов, связанных с неравенствами.

На одни вопросы вы сможете ответить уже сейчас, на другие – нет. Размышления над ними могут дать вам материал для дальнейшего изучения неравенств.

Ситуация 1. На числовой оси отмечены числа a, b, c. Можно, например, записать верное числовое неравенство $b<a$. Какие еще верные числовые неравенства можно составить для чисел a, b, c?



Ситуация 2. Изучите доказательство утверждения (софизма).

Для любых чисел a и b из того, что $a>b$, следует, что $a>2b$.

«*Доказательство*». Пусть $a>b$.

1. Умножим обе части неравенства на b:
   $a \cdot b>b^2$.
2. Вычтем из обеих частей полученного неравенства a^2:
   $a \cdot b-a^2>b^2-a^2$.
3. Разложим обе части неравенства на множители:
   $a(b-a)>(b-a)(b+a)$.
4. Разделим обе части неравенства на $(b-a)$:
   $a>b+a$.
5. Прибавим почленно к полученному неравенству исходное неравенство $a>b$:
   $2a>2b+a$.
6. Вычтем из обеих частей полученного неравенства a:
   $a>2b$.

Очевидно, что рассматриваемое утверждение неверно, и при его доказательстве допущена ошибка. (Такие ложные утверждения с замаскированной ошибкой называются софизмами.) Ведь из того, например, что $5>3$, совсем не следует, что $5>6$.

Попробуйте предположить, какое преобразование неравенств привело к неверному результату.

Ситуация 3. Решите задачи.

а) За 5 часов катер прошел против течения реки 170 км. Собственная средняя скорость катера была равна 40 км/ч. Какова скорость течения реки?

б) За 5 часов катер прошел против течения реки больше, чем 170 км. Собственная средняя скорость катера была равна 40 км/ч. Какова скорость течения реки?

Что общего в условиях этих задач? Чем они различаются?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 170–171)

Следующий текст, связанный с формулой квадрата суммы и разности, показывает, как, используя данную формулу, получать новые тождества, а также получать новые знания о числах и свойствах алгебраических выражений.

1) Докажите тождество
   $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.
2) Используя это тождество, вычислите устно 44^2+36^2.
3) Приведите другие примеры использования данного тождества.

1) На какую величину изменится площадь квадрата со стороной x см, если его стороны увеличить на 1 см?
2) На какую величину изменится площадь квадрата со строкой x см, если его стороны уменьшить на 1 см?
3) Каким должно быть число a, чтобы при его увеличении на единицу квадрат числа a также увеличился на единицу?
4) Вычислите значения квадратов чисел: 41^2, 151^2, 31^2, 29^2, 119^2, 49^2.

Делится ли значение целого выражения:
а) $(n-5)^2-(n+5)^2$; б) $(6n+2m)^2-24mn$; в) $(n-5)^2+(n+5)^2$ – на 4 при любых натуральных значениях m и n?

Известно, что если для сторон a, b и c некоторого треугольника выполняется равенство $a^2+b^2=c^2$, то этот треугольник прямоугольный, и наоборот, если a и b – катеты прямоугольного треугольника, то выполняется равенство $a^2+b^2=c^2$.

Пусть x, y, z – некоторые числа и $a=x^2-y^2$, $b=2xy$, $c=x^2+y^2$ – это длины сторон некоторого треугольника. Проверьте, является ли треугольник со сторонами a, b и c прямоугольным.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 59–60)

- **Текст – перенос понятия в новую ситуацию**

Тексты, обеспечивающие фазу переноса, предоставляют учащимся возможность соотнести свой прошлый опыта с содержанием нового понятия, использовать известные им методы для изучения новых объектов. Таким образом, содержание усваиваемого понятия соотносится с новой ситуацией и «проверяется» в новом контексте.

Приведем текст, который способствует соотнесению прошлого опыта учащихся с содержанием нового понятия. Он помогает учащимся увидеть, как можно обосновывать способы нахождения значений некоторых числовых выражений, решать новые виды уравнений, преобразовывать алгебраические выражения.

Выполните следующие задания и обратите внимание на то, в каких ситуациях полезно применять формулу квадрата суммы (разности).

Задание 11. Обоснуйте следующее правило: *чтобы натуральное число, оканчивающееся цифрой* 5, *возвести в квадрат, нужно число его десятков умножить на следующее за ним натуральное число и к произведению приписать справа* 25.

Например, возведем в квадрат число 35. В данном числе 3 десятка, следующее за числом 3 – число 4. Умножаем 3 на 4:

$3 \cdot 4 = 12$.

Приписываем к 12 справа число 25, получаем 1225:

$35^2 = 1225$.

Докажем правило. Пусть натуральное число оканчивается на цифру 5. Обозначим число его десятков через n, тогда рассматриваемое число можно записать в виде $10n+5$. Возведем его в квадрат:

$(10n+5)^2 = 100n^2+2 \cdot 10n \cdot 5+25 = 100n(n+1)+25$.

Полученное равенство является алгебраической записью правила.

Задание 12. Найдите числовое значение алгебраического выражения $(m+n)^2-(m-n)^2$ при $m=3$ и $n=15$.

Задание 13. Решите уравнение:

а) $x^2+4-(x+2)^2 = -16$; б) $(x-2)^2-(x+2)^2 = -16$.

Например, решим первое уравнение:

$x^2+4-(x+2)^2 = -16$;

$x^2+4-(x^2+4x+4) = -16$;

$x^2+4-x^2-4x-4 = -16$;

$-4x = -16$;

$x = 4$.

Ответ: 4.

Задание 14. Приведите примеры применения формулы квадрата суммы.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 103)

- **Текст – свертывание содержания понятия**

Полноценный процесс образования понятий предполагает еще одну, последнюю фазу – свертывание: представление субъективного образа понятия в сжатой концентрированной форме. Такие тексты могут включать задания, которые являются неожиданными для учащихся; требуют экстренной мобилизации знаний об изученном; способствуют выделению ключевых элементов понятия и т. д.

Может ли дробь $\frac{a+1}{ab}$ быть суммой:

а) двух дробей;
б) трех дробей;
в) двух равных дробей;
г) противоположных дробей;
д) двух дробей, одна из которых равна $\frac{x}{y}$?

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 114)

Вычислите устно:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{9}$; в) $\frac{(7\sqrt{5})^2}{35}$;
г) $\frac{(7\sqrt[3]{4})^2}{\sqrt[3]{2}}$; д) $\frac{\sqrt{54}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; е) $(\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt[3]{4}$;
ж) $\sqrt{2^3\cdot 4^3\cdot 8^3}$; з) $\sqrt[3]{2^2\cdot 4^2\cdot 8^2}$; и) $2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$;
к) $3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

(Алгебра – 8: практикум, 2013, с. 65)

Представьте, что вам нужно сконструировать говорящего робота, который мог бы рассказать как можно больше о квадратных уравнениях. Подумайте, на какие вопросы он должен уметь отвечать.

(Алгебра – 8: практикум, 2013, с. 102)

3.9. Конструирование понятий и создание авторских текстов

- **Текст – поиск и обобщение закономерностей**

Средствами текста создаются условия для развития способности «увидеть» закономерность, сформулировать и объяснить ее; использовать найденную закономерность для решения задач.

Приведем примеры текстов, которые направлены на организацию поиска закономерностей при повторении умножения натуральных чисел (поиск закономерностей в таблице умножения; поиск закономерностей при умножении двухзначных чисел; поиск закономерностей в умножении натуральных чисел, оканчивающихся на одинаковую цифру) (5-й класс).

Фрёкен Снорк взялась умножать 3 на разные числа:
$3\cdot 0=0$;
$3\cdot 1=3$;
$3\cdot 2=6$ – это я уже знаю;

$3 \cdot 3 = 9$, ведь $3+3+3=9$;
$3 \cdot 4 = \ldots$ Нет, не буду я складывать четыре тройки, а лучше к девяти прибавлю три – получится двенадцать. Значит,
$3 \cdot 4 = 12$;
$3 \cdot 5 = 15$: ведь $12+3=15$, а четыре раза по три и еще раз три – это пять раз по три;
$3 \cdot 6 = 18$;
$3 \cdot 7 = 21$, дальше действуем так же;
$3 \cdot 8 = 24$;
$3 \cdot 9 = 27$.

Все немного помолчали и решили переписать результаты вычислений фрёкен Снорк в один столбик.

$3 \cdot 0 = 0$
$3 \cdot 1 = 3$ Сначала 3, 6, 9.
$3 \cdot 3 = 6$
$3 \cdot 3 = 9$
$3 \cdot 4 = 12$
$3 \cdot 5 = 15$ Затем три числа с цифрой 1 впереди, но суммы цифр у них
$3 \cdot 6 = 18$ опять 3, 6, 9.
$3 \cdot 7 = 21$
$3 \cdot 8 = 24$ А дальше три числа с цифрой 2 впереди, и снова те же суммы
$3 \cdot 9 = 27$ цифр: 3, 6, 9.

– Ничего себе таблица! – воскликнул Муми-тролль. – Я хочу сделать то же самое с числом 2.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 97)

Заполните таблицу. Дайте ей название.

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										

Укажите наименьшее и наибольшее значения произведений.

Повторяются ли числа в таблице? Сколько раз? Какие полезные для счета закономерности вы обнаружили в таблице?

(Математика: рабочая тетрадь для 5 класса.
Натуральные числа, 2013, с. 48)

1) Какой цифрой оканчиваются произведения?
   - а) $4 \cdot 4$
   - б) $4 \cdot 4 \cdot 4$
   - в) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
   - г) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
   - д) $14 \cdot 24 \cdot 34$
   - е) $2574 \cdot 904 \cdot 14$
2) В каком случае произведение четверок оканчивается цифрой 4 и в каком случае – цифрой 6? Приведите свои примеры.
3) Составьте и выполните аналогичное задание относительно произведений шестерок.

(Математика: рабочая тетрадь для 5 класса.
Натуральные числа, 2013, с. 55)

Выполните сложение столбиком.

Группа А	$\begin{array}{r}425\\+\,163\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}32\\+\,1027\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}23{,}75\\+\,54{,}14\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}102\\+\,0{,}439\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}94{,}6\\+\,5{,}207\\\hline\end{array}$
Группа Б	$\begin{array}{r}425\\+\,697\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}32\\+\,10989\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}23{,}75\\+\,98{,}45\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}102{,}003\\+\,0{,}998\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}94{,}6\\+\,5{,}702\\\hline\end{array}$

Выясните, чем отличается группа А от группы Б.

Допишите в каждую группу по одному примеру.

Вычислите:

а) 2,34+36,15; б) 0,62+0,1; в) 9+2,3;
г) 2,310+19,897; д) 2,78+0,22; е) 15+0,08.

Какие случаи сложения десятичных дробей вы бы выделили?

Составьте аналогичные задания.

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 182)

- **Текст – моделирование**

Благодаря такого рода текстам учащиеся осваивают умение строить математические модели, то есть закладываются основы для формирования способности к концептуализации (мысленному конструированию теоретических представлений на основе абстрагирования связей по отношению к конкретному предметному содержанию).

Так, изучение алгебры в 7-м классе начинается с сюжетной задачи, работа над которой мотивирует учащихся к конструированию математических моделей, их анализу и обобщению. Данная сюжетная задача и ее анализ создают условия для того, чтобы учащиеся осознали роль языка алгебры.

Задание 1. Решите старинную задачу.

Некто подошел к клетке, в которой сидели фазаны и кролики. Сначала он сосчитал головы, их оказалось 15. Потом он подсчитал лапки, их было 42. Сколько кроликов и сколько фазанов было в клетке?

Вот какое решение мог бы предложить человек, знающий арифметику и умеющий здраво рассуждать:

...

А теперь посмотрим, как мог бы разобраться в ситуации, описанной в условии задачи, человек, который умеет решать задачи с помощью уравнений.

...

(*В итоге решения задачи с помощью уравнений учащиеся приходят к модели:* $4x+2(15-x)=42$; *далее через серию заданий – сюжетных задач – продолжается работа с данной моделью.*)

Задание 2. Решите задачу о фазанах и кроликах, если в ее условии будет сказано, что в клетке было 12 голов и 40 лап. Какой из методов вы выбрали для ее решения: арифметический или алгебраический? Что изменилось в решении задачи?

Задание 3. Сформулируйте задачу о фазанах и кроликах, для решения которой можно использовать уравнение $4x+2(7-x)=24$.

В предыдущих заданиях задача о фазанах и кроликах решалась при различных значениях количества лап и голов. Возникает вопрос, при любом ли количестве лап и голов задача имеет решение?

Задание 4. Решите задачу о фазанах и кроликах для следующих случаев: а) 16 голов и 56 лап; б) 30 голов и 50 лап; в) 15 голов и 55 лап.

Чтобы выполнить задание 4, можно решить задачу о фазанах и кроликах трижды, меняя каждый раз только количество лап и количество голов. А можно попытаться сначала решить задачу в общем виде, затем получать решения для частных случаев. Давайте *сформулируем задачу в общем виде* и решим ее.

Задание 5. Решите задачу.

Некто подошел к клетке, в которой сидели фазаны и кролики. Сначала он сосчитал головы, их оказалось a. Потом он подсчитал лапы, их было b. Сколько кроликов и сколько фазанов было в клетке?

...

Мы закончили исследование задачи о кроликах и фазанах. Что дало нам это исследование?

Известный американский математик и педагог Д. Пойа (1887–1985) подчеркивал, что, решая задачи только с числовыми, а не буквенными данными, мы лишаемся возможности поучительного исследования формулы и упускаем ценную проверку результата решения.

...

Перейдя от задачи с числовыми данными к задаче с буквенными данными, мы смогли выполнить более глубокое исследование задачи. Задачи с буквенными данными могут встречаться и в других ситуациях.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 6–10)

- **Текст – микросочинение**

К текстам этого типа относятся тексты, инициирующие учащихся давать развернутые письменные ответы на поставленный вопрос, самостоятельно придумывать задачи.

Что ты можешь сказать про число 16? Какое оно: целое? отрицательное? положительное? Чему равен его модуль? Найди его место на координатной прямой.

Составьте рассказ о числе, противоположном числу 16, используя конспект...

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 36)

Составьте три таких примера, в которых распределительный закон упрощает вычисления.

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 167)

1) Составьте алгебраическую дробь, которую можно сократить на одночлен.
2) Составьте алгебраическую дробь, которая после сокращения будет равна: а) числу, не равному единице; б) многочлену.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 189)

1) Придумайте 2–3 задачи, которые можно решить с помощью одного и того же уравнения.
2) Составьте задачи по заданным уравнениям на заданные темы:

Уравнение	Тема задачи
$\frac{100}{x}=\frac{100}{x+10}+1$	Движение Покупка товара Работа
$x(x-7)=30$	Площадь участка
$2\left(x+\frac{210}{x}\right)=62$	Периметр прямоугольника
$\frac{15}{x}-\frac{6}{x-2}=1$	Движение Работа

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 133)

- **Текст – самостоятельное создание авторского текста**

Особое значение имеют тексты, которые ориентируют учащихся на самостоятельное создание авторских текстов по определенным вопросам курса математики. Данные тексты (в том числе в виде кратких обращений к ученику-читателю) инициируют интеллектуальную активность учащихся, направленную на обобщение полученных знаний, интерпретацию и обоснование той или иной проблемной ситуации (например, в виде разработки контрольной работы «для другого ученика», рассказа о применении изученного понятия в разных ситуациях, сочинения истории на математическую тему и т. д.).

Устройте в классе конкурс на лучшую рекламу дроби $\frac{8}{12}$.

...Сделайте антирекламу дроби $\frac{8}{12}$.

...Сочините историю под названием «Сравнение в жизни дроби $\frac{8}{12}$».

...Напишите рассказ (пьесу, сказку), в котором участвуют различные обыкновенные дроби.

...Составьте сценарий, в котором каждая сцена показывает один из случаев умножения рациональных чисел.

...Подготовьте сообщение о том, почему при делении положительного рационального числа на дробь получается число, большее делимого. Сопроводите сообщение иллюстрациями.

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 124–149)

Знакомы ли вам слова «масштаб» и «пропорция»? Знаете ли вы, что они означают? Предлагаем вам посмотреть словари, справочники, энциклопедии, школьные учебники по географии и математике и выписать разные сведения об этих понятиях. Используя полученную информацию, подготовьте сообщение или напишите реферат, или разработайте сценарий урока, который можно озаглавить так:

- О дружбе двух понятий: «пропорция» и «масштаб»;
- Где встречаются вместе пропорция и масштаб;
- Тема «Масштаб» в школьном учебнике математики;
- Пропорция и масштаб в архитектуре;
- Когда не обойтись без масштаба и пропорций.

Можно предложить и защитить любые другие темы, посвященные изучению масштаба и пропорций.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 182)

Подготовьте презентацию на тему «Действия над алгебраическими дробями».

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 122)

Составьте проверочную работу по теме «Одночлены. Умножение одночленов».

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 30)

Напишите сочинение на тему «Где можно применять рациональные алгебраические выражения».

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 133)

Составьте задание, которое требовало бы классифицировать уравнения вида $x^4 = a$ по числу или виду корней.

(Алгебра – 8: практикум, 2013, с. 32)

- **Текст – приглашение к проекту**

Тексты этого типа организованы так, чтобы мотивировать учащихся к выбору и формулированию темы проекта, его разработке и реализации. Защита проектов осуществляется после окончания изучения темы.

Первые проектные задания учащиеся выполняют, начиная с 5-го класса (в рамках темы «Натуральные числа и десятичные дроби»).

Оформите выставку материалов по истории записи натуральных чисел.

Советы. Обратитесь к математическим энциклопедиям, сети Интернет и так далее. Можно представить материалы из истории записи натуральных чисел (например, в Древнем Риме).

Подготовьте электронную презентацию по теме «Натуральные числа».

Советы. Постарайтесь, чтобы материалы о натуральных числах были представлены интересно, красочно и запоминались.

Подготовьте математический праздник (театральное представление, КВН) на тему «Так считали на Руси».

Советы. Разработайте сценарий, наполните его познавательными материалами (может быть, в стихотворной форме) о счете на Руси.

Найдите числа-экспонаты для кунсткамеры (*нем*. Kunstkammer – кабинет редкостей, музей) натуральных чисел.

Советы. Например, рассмотрите числа 13 и 64. Их сумма равна 77. Переставьте местами цифры в каждом из этих чисел. Сумма полученных чисел – 31 и 46 – тоже равна 77. Много ли таких двузначных чисел? Определите условие, которому должны удовлетворять цифры двузначных чисел, чтобы для них сохранялось такое свойство. Можно ли найти трехзначные числа с аналогичным свойством? Найдите другие числа, которые вы бы поместили в кунсткамеру натуральных чисел.

(Математика: рабочая тетрадь для 5 класса.
Натуральные числа, 2013, с. 66)

Подготовьте сборник заданий по теме «Десятичные дроби».

Советы. Постарайтесь поместить в сборник разнообразные и интересные задания с указанием авторов. Приведите ответы к задачам; авторские решения занимательных задач.

Сочините стихи (считалки, песенки и так далее), в которых в рифмах даются правила (алгоритмы) действий с десятичными дробями.

Советы. Попробуйте в стихотворной форме рассказать, например, о роли и месте запятой при выполнении действий над десятичными дробями.

Сделайте иллюстрации, помогающие понять и правильно выполнять действия над десятичными дробями.

Советы. Изучите разные учебники. Достаточно ли рисунков, схем, таблиц используется в них при изучении темы «Десятичные дроби»? Какие из них кажутся вам наиболее выразительными, полезными?

(Математика: рабочая тетрадь для 5 класса.
Десятичные дроби, 2013, с. 71)

Вы можете отыскать дополнительную информацию о греческом математике Диофанте и диофантовых уравнениях. Известны, например, и другие приемы решения диофантовых уравнений: метод спуска, алгоритм Евклида. Познакомиться с ними можно самостоятельно, выполнив проект.

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013)

Задание-проект. Члены последовательности

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ...

имеют специальное название – *числа Фибоначчи*, сама последовательность – *последовательность Фибоначчи*.

1) По какому правилу строится эта последовательность?
2) Какой способ задания последовательности представляет собой следующее правило?

Первые два члена последовательности чисел Фибоначчи равны 1, а каждый следующий, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих.

3) Запишите рекуррентную формулу для чисел Фибоначчи (f_n).
4) Какими еще свойствами обладают числа Фибоначчи? Сформулируйте и докажите некоторые из них: ...

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 241–243)

3.10. Планирование

- **Текст – программа**

Такие тексты содержат общую цель предстоящей деятельности и ее подцели, ориентируют на составление плана своих действий. Текст может состоять из следующих частей: постановка перед учащимися проблемы поиска целей, например, через анализ прошлого опыта; представление для сравнения варианта таких программ в учебном тексте; создание условий для выбора учащимися индивидуального плана изучения соответствующего материала.

Приведем пример текста этого типа по теме «Квадратные уравнения» (8-й класс).

Итак, решены обе задачи, поставленные в начале параграфа.

При решении второй задачи получено квадратное уравнение. Есть ли другие задачи, решение которых тоже сводится к решению квадратного уравнения?

Вы познакомились с несколькими квадратными уравнениями.

Достаточно ли у вас знаний для решения любого квадратного уравнения?

Попробуйте составить план изучения квадратных уравнений. Предлагаем оформить его в виде вопросов и сравнить с теми, которые поставили мы.

- Как опознать квадратное уравнение?
- Какие способы можно применить при решении квадратных уравнений?
- Как определить, имеет ли квадратное уравнение корни и сколько именно корней оно имеет? Обязательно ли для этого решать уравнение?
- Как получить формулу корней квадратного уравнения?
- Существуют ли связи между корнями и коэффициентами квадратного уравнения?
- В каких задачах могут возникнуть квадратные уравнения?

Полистайте учебник, посмотрите оглавление. В каких, на ваш взгляд, параграфах содержится материал, необходимый для ответа на тот или иной вопрос?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 98)

- **Текст – выбор цели**

В текстах этого типа представлено некоторое множество целей изучения определенного вопроса, при этом само изучение темы осуществляется через перебор возможных целей, их анализ и выбор наиболее значимой для данной деятельности цели. Среди целей, подлежащих выбору, имеются и те, пути реализации которых известны учащимся, и те, которые на данном этапе изучения являются совершенно новыми.

Мы рассмотрели решение систем линейных уравнений. Перейдем к решению систем, которые содержат не только линейные уравнения.

Задание. Посмотрите на рисунок 100. Какие задачи вы поставили бы, глядя на этот рисунок? Подумайте, можно ли сформулировать их, например, так:

1. Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 0{,}4x^2 - 0{,}6$ и $y = 3{,}4 - 1{,}2x$.

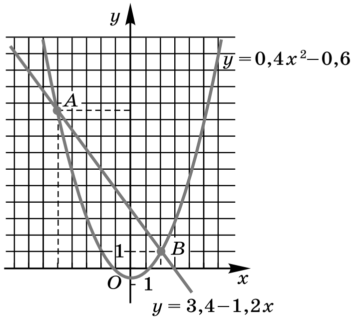


Рис. 100

2. Записать абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 0{,}4x^2 - 0{,}6$ и $y = 3{,}4 - 1{,}2x$.
3. Определить длину отрезка, отсекаемого параболой от прямой.
4. Найти корни уравнения $0{,}4x^2 - 0{,}6 = 3{,}4 - 1{,}2x$.
5. Указать множество решений неравенства $0{,}4x^2 - 0{,}6 \leqslant 3{,}4 - 1{,}2x$.
6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y = 3, \\ 6x + 5y = 17. \end{cases}$$

7. Определить число точек пересечения параболы $y = 0{,}4x^2 - 0{,}6$ и прямой $y = 3{,}4 - 1{,}2x$.

В каких из этих задач встречается квадратичная функция?

Какие из данных задач вы уже решали (графически или аналитически)?

Какие задачи вы смогли бы решить, используя аналогию и известные вам методы решения других задач?

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 182)

- **Текст – построение плана**

Тексты подобного типа развивает у учащихся умение выстраивать планы собственной интеллектуальной деятельности на основе определения последовательности умственных действий (план решения текстовых задач, план с использованием алгоритма и т. д.).

Решите задачу.

В первой корзине яблок в 4 раза больше, чем во второй. Когда из первой корзины переложили во вторую 18 яблок, то в обеих корзинах яблок стало поровну. Сколько яблок было в каждой корзине первоначально?

Решим задачу с помощью уравнения. Рассмотрим возможные шаги при данном способе решения.

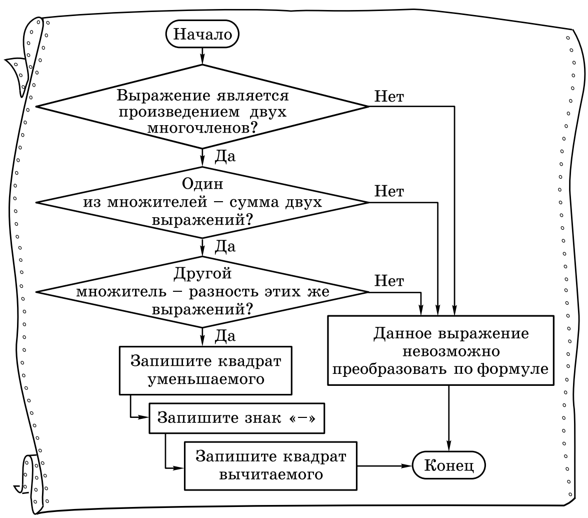
...

Какие шаги, с вашей точки зрения, полезно использовать при решении задач методом уравнений? Сравните их со следующими:

1. Выяснить, о чем идет речь в задаче.
2. Указать, какими величинами можно описать эти процессы.
3. Представить условие задачи в виде рисунка, схемы, таблицы (в случае необходимости).
4. Выбрать в условии задачи предложение, позволяющее составить уравнение (то есть выбрать «основание» для составления уравнения).
5. Выбрать неизвестную.
6. Выразить через эту неизвестную все остальные неизвестные величины.
7. Составить уравнение.
8. Решить уравнение.
9. Проверить, удовлетворяет ли найденный корень уравнения условию задачи.
10. Записать ответ.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 136)

Рассмотрите предложенный алгоритм применения формулы произведения суммы двух алгебраических выражений и их разности.



Примените алгоритм для преобразования выражений:

а) $a+b(a-b)$;
б) $(x^2-y^2)(xy)^2$;
в) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$;
г) $(x^2+y^2)(-x^2+y^2)$.

Какие выражения невозможно преобразовать по формуле произведения суммы двух выражений и их разности?

Приведите примеры преобразования алгебраических выражений по данному алгоритму.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 117)

3.11. Прогнозирование

- **Текст – разработка гипотезы**

Тексты этого типа обучают работе с гипотезой (ее формулированием, обоснованием, проверкой, сообщением результата). Знакомясь с данным текстом, учащиеся видят, как гипотеза либо «сходит со сцены» и, обнаружив свою несостоятельность, уступает место другим гипотезам, либо превращается в достоверное знание (перестает быть гипотезой).

Рассмотрим следующий текст (раздел «Делимость суммы», тема «Делимость чисел», 6-й класс), который создает условия для развития у учащихся умений строить гипотезы, опровергать их с помощью контрпримеров, формулировать новые гипотезы и т. д.

Вернемся к одному из выводов, который мы получили в предыдущем параграфе:

Если запись натурального числа оканчивается двумя нулями, то это число делится на 4.

Можно ли это утверждение считать признаком делимости на 4?

Нет, потому что эта формулировка описывает только некоторые числа, делящиеся на 4, но далеко не все, например: $24 \vdots 4$, хотя запись не оканчивается двумя нулями, $516 \vdots 4$, хотя запись не оканчивается двумя нулями.

(Приведите примеры еще нескольких трехзначных чисел, которые делятся на 4, при том что их запись не оканчивается двумя нулями.)

Попробуем разобраться, почему одни числа делятся на 4, а другие нет.

Рассмотрим примеры:

$500 \vdots 4$; $524 \vdots 4$; $514 \not\vdots 4$.

500⋮4, так как целое число сотен делится на 4.

Проанализируйте следующие записи:

524 = 500+24, оба слагаемых делятся на 4, и вся сумма делится на 4.

514 = 500+14, одно слагаемое делится на 4, а другое нет, и вся сумма не делится на 4.

Возможно, у вас появилось предположение (гипотеза): *если в сумме двух чисел каждое слагаемое делится на 4, то и вся сумма делится на 4.*

Попробуем убедиться в правильности такого предположения.

Сначала рассмотрим числовой пример:

$500⋮4$; $(500 = 4 \cdot 125)$, $24⋮4$ $(24 = 4 \cdot 6)$,

$500+24 = 4 \cdot 125+4 \cdot 6 = 4 \cdot (125+6)$, это значит, что сумма 500+24 тоже делится на 4.

Теперь проведем те же рассуждения в общем виде (все буквы будут обозначать натуральные числа)...

(Математика. 6 класс. Учебник, 2012, с. 48)

Заметим, что в 5–6-х классах вместо термина «гипотеза», как правило, в тексте используются слова «догадка», «версия», «предположение». В 7–8-х классах перед школьниками напрямую ставится задача выдвинуть гипотезу и проработать ее. Приведем пример такого текста (тема «Действительные числа», 8-й класс).

Извлекаем арифметический корень из произведения, частного, степени

В этом параграфе начнем поиск ответа на вопрос: «Как извлечь корень из рационального выражения?»

Начнем с простейших выражений, представляющих собой произведение или дробь.

Задание 1. Составьте выражение для нахождения стороны квадрата и постарайтесь ее вычислить, если площадь квадрата равна:

а) площади прямоугольника со сторонами 25 см и 81 см;
б) площади прямоугольника со сторонами 2,5 дм и 8,1 дм;
в) $5\frac{4}{9}$ кв. единиц;
г) $\frac{1}{9}$ площади прямоугольника в 400 кв. единиц;
д) $\frac{1}{5}$ площади прямоугольника в 400 кв. единиц;
е) 10^8 кв. единиц;
ж) 10^5 кв. единиц;
з) учетверенной площади квадрата со стороной 3,7;
и) учетверенной площади квадрата со стороной 2b.

Поиск гипотезы

Выполняя задание, вы, наверное, записали выражения для нахождения стороны квадрата:

а) $\sqrt{25\cdot 81}$;   б) $\sqrt{2{,}5\cdot 8{,}1}$;   в) $\sqrt{5\,\frac{4}{9}}$;

г) $\sqrt{\frac{400}{9}}$;   д) $\sqrt{\frac{400}{5}}$;   е) $\sqrt{10^8}$;

ж) $\sqrt{10^5}$;   з) $\sqrt{4\cdot(3{,}7)^2}$;   и) $\sqrt{4\cdot(2b)^2}$.

Все эти выражения являются квадратными корнями. Как выполнить извлечение корня?

Конечно же, можно сначала найти значение подкоренного выражения, а затем извлечь квадратный корень.

Например:

$$\sqrt{25\cdot 81}=\sqrt{2025},\quad \sqrt{2025}=45.$$

А можно воспользоваться свойствами арифметических корней:

$$\sqrt{25\cdot 81}=\sqrt{5^2\cdot 9^2}=\sqrt{(5\cdot 9)^2}=5\cdot 9=45.$$

Можно ли найти $\sqrt{25\cdot 81}$ как-нибудь еще? Например, верно ли равенство $\sqrt{25\cdot 81}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{81}$?

Проверьте, годится ли этот способ для вычисления, например, корней: $\sqrt{4\cdot 9}$, $\sqrt{64\cdot 36}$. Если такой способ «сработает», то, может быть, вы сумеете выдвинуть соответствующую гипотезу о способе нахождения $\sqrt{a\cdot b}$ при любых неотрицательных значениях a и b?

Помните: опровергнуть гипотезу можно одним примером, для которого соответствующее утверждение неверно. И как бы много примеров, подкрепляющих гипотезу, вы ни обнаружили, для доказательства утверждения этого мало! Уверены ли вы, например, что ваша догадка верна для $\sqrt{3\cdot 37}$?

Попытайтесь на основе гипотезы сформулировать утверждение о способе нахождения арифметического корня из произведения и доказать его. Сравните ваши формулировки и доказательства со следующими...

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 53–54)

- **Текст – прогноз в ситуации неопределенности**

Важным элементом таких текстов являются задачи с недостающими, избыточными и противоречивыми данными, которые вынуждают учащихся мыслить в режиме «что будет, если...».

Беседа о степенях двучлена

В данной беседе мы продолжим линию обобщения формулы квадрата двучлена (бинома) a+b.

Вы уже знаете равенства

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Задание 1. Попытайтесь записать аналогичное равенство для $(a+b)^4$.

Спрогнозируйте количество одночленов в многочлене, стоящем в правой части равенства, значения их коэффициентов, поведение показателей степеней.

Проверьте себя одним из способов:

$(a+b)^4=(a+b)^3\,(a+b)=...;$

$(a+b)^4=((a+b)^2)^2=...;$

$(a+b)^4=(a+b)^2\,(a+b)^2=...$

Если вы были внимательны, то получили равенство $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Подтвердился ли ваш прогноз?

Что характерно для правой части этого равенства?

- При переходе от каждого слагаемого к следующему показатель степени a убывает на 1, а показатель степени b возрастает на 1.
- Степень каждого одночлена, входящего в многочлен, равна 4.
- Число слагаемых многочлена на единицу больше, чем показатель степени двучлена.
- Второй коэффициент совпадает с показателем степени двучлена.
- Коэффициенты, равноудаленные от концов многочлена, совпадают (то есть первый коэффициент равен последнему, второй – предпоследнему и так далее).

Задание 2. Спрогнозируйте стандартный вид многочлена в правой части равенства

$$(a+b)^5=...$$

Единственное, что может вызвать у вас затруднение, – это коэффициенты многочлена. Эти коэффициенты принято называть ***биномиальными*** – от слова «бином». Конечно, их можно получить непосредственным вычислением. А нельзя ли найти более простой способ для их вычисления?

Существует ли закономерность, позволяющая записать коэффициенты, не производя алгебраических преобразований?..

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 132)

К этому типу относятся тексты, которые включают задания с недостающими данными. Учащиеся включаются в процесс прогнозирования, так как возникает необходимость ликвидировать разрыв между условием задачи и ее требованием.

Первые 2 ч велосипедист ехал на 6 км/ч быстрее, чем остальные 3 ч. С какой скоростью ехал велосипедист первоначально?

Составьте всевозможные числовые выражения по тексту задачи и объясните, что они означают.

Можно ли ответить на вопрос задачи?

Дополните текст задачи так, чтобы ее удобно было решать с помощью уравнения.

Учащиеся предложили следующие дополнения:

1) ..., если за 5 ч он проехал ... км;
2) ..., если за первые 2 ч он проехал столько же, сколько за 3 ч;
3) ..., если за первые 2 ч он проехал на ... км меньше, чем за оставшиеся 3 ч;
4) ..., если за первые 2 ч он проехал 28 км;
5) ..., если в пути он находится 5 ч.

Выберите из данных уравнений те, которые можно использовать для решения этих пяти новых задач:

а) $3x = 2(x+6)$; б) $2 \cdot (x+6)+3x = 1000$;
в) $2 \cdot (x+6)+3x = 78$; г) $3x-2 \cdot (x+6) = 10$.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 150)

- **Текст – прогноз результата действия**

Тексты, ориентирующие учащихся на прогнозирование (предвидение) конечного результата действия, могут включать прямые задания, которые содержат требование предвидеть результат, и обратные задания, где предполагается найти действия, приводящие к заданному результату.

1) Расставьте знаки действий и скобки так, чтобы получились верные равенства:
   а) 600 200 100 = 12000000
   б) 600 200 100 = 1200
   в) 600 200 100 = 602
   г) 600 200 100 = 300
   д) 600 200 100 = 103
   е) 600 200 100 = 6
   ж) 600 200 100 = 2
2) Какие еще результаты могут получиться при выполнении действий с числами 600, 200, 100?

а) 600 200 100 =
б) 600 200 100 =
в) 600 200 100 =

(Математика: рабочая тетрадь для 5 класса. Натуральные числа, 2013, с. 62)

Может ли число –91 оказаться произведением двух целых чисел? трех целых чисел? четырех целых чисел? семи целых чисел?

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 79)

Подберите значения *a*, чтобы произведение $\frac{3}{4}a$ равнялось:

а) дробному числу; б) целому числу; в) числу, меньшему единицы; г) числу, большему единицы; д) нулю; е) трем четвертым; ж) единице.

Единственное ли решение имеется в каждом случае?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса: Ч. 2, 2013, с. 139)

Составьте примеры умножения и деления алгебраических дробей, когда в результате получается:

а) число;
б) одночлен;
в) двучлен $a+b$;
г) алгебраическая дробь;
д) алгебраическое выражение, значение которого положительно при любых значениях переменных.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 122)

Даны две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 9y = 10, \\ 1{,}1x + 10y = 11{,}1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 9y = 10,1, \\ 1{,}1x + 10y = 11{,}1. \end{cases}$$

Чем они различаются?

– Не решая этих систем, попытайтесь оценить, будут ли их решения различаться значительно?
– Решите обе системы линейных уравнений.
– Сравните полученные результаты.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 128)

3.12. Самоконтроль

- **Текст – способы самоконтроля**

Этот тип текстов помогает научиться приемам самоконтроля при изучении отдельных тем. Текст как средство организации самоконтроля учебно-познавательной деятельности ученика предполагает: постановку обратных задач; примерную оценку искомого результата; обсуждение возможных способов проверки верности утверждений; выбор ориентиров контроля.

К текстам, мотивирующим учащихся осуществлять самоконтроль, относятся игры с жесткими правилами (домино, лото, лабиринт, зашифрованное слово). В рамках этих текстов у учащихся имеется возможность узнать, правильно ли получен результат, и в случае неудачи начать поиск ошибок.

Решите примеры:

а) $\left(\frac{1}{2} + 0{,}8 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(3 + 5\frac{8}{25} - 0{,}12\right)$;

б) $\left(2\frac{3}{4} + 0{,}15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 0{,}04\right)$;

в) $\left(2{,}314 - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{50} + \left(1\frac{11}{16} + 0{,}7125\right) : 3$.

Выпишите ответы всех примеров в строчку. Пользуясь ключом шифра, прочтите старинное русское слово.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
Ш	У	К	С	А	П	Ф	Л	Н	Ю

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 169)

Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x-1} = x+1$;

б) $\sqrt{x^2+5x-3} = x + \sqrt{x-3}$;

в) $5\sqrt{2x+3} - \sqrt{18x-5} = \frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$;

г) $\sqrt{20x-4} - \sqrt{10x+5} = 1$;

д) $\frac{3x-2}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3x+4}{x^2-2x}$.

Запишите корни уравнений последовательно по порядку номеров уравнений, воспользуйтесь ключом к шифру и узнайте оценку вашего труда.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Н	М	В	А	О	Б	Г	Р	Ю	Ш

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 94)

Следующие фрагменты текста знакомят учащихся с приемами самоконтроля. Среди таких приемов можно выделить примерную оценку искомого результата на основе здравого смысла (раздел «Действия над десятичными дробями») (5-й класс).

Округлите сумму до целых, десятых, сотых: а) 0,1+0,239+0,17; б) 15,27+ 0,033+6,5.

Между какими двумя последовательными натуральными числами находится сумма: а) 7,02+6,7998; б) 3,91+0,9894; в) 40,6+0,0006; г) 10,77+4,23?

Не производя точных вычислений суммы 1,5702+2,13547, исключите неверные ответы: 37,15671; 3,71567; 2,61504; 3,615047.

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 186)

Четыре ученика выполнили умножение 7,67 · 35,8 и получили следующие результаты: а) 274,586; б) 2745,86; в) 274,588; г) 27,4586.

Известно, что один из результатов верный. Выберите верный результат и объясните свой выбор.

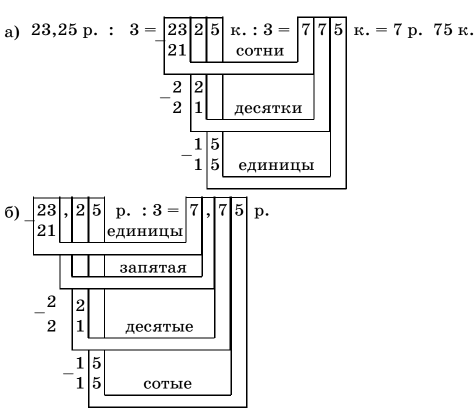
Какие из произведений оказались между числами 200 и 300?

а) 37 · 21; б) 43 · 6; в) 2,34 · 15; г) 7,35 · 14; д) 5,187 · 40,3; е) 49,4 · 3,8.

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 201)

Одним из приемов самоконтроля является постановка и решение обратных задач.

1) Составьте задачи по предложенным решениям:



2) Проверьте результаты: а) сложением; б) вычитанием; в) умножением; г) делением.

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 212)

Ученик построил график квадратичной функции $y=2x^2-12x+18$ (рисунок 88).

1) Проверьте, верно ли выполнено построение.
2) Что вы проверяли при ответе на вопрос:
   а) координаты вершины,
   б) направление ветвей параболы,
   в) точки пересечения параболы с осями координат,
   г) удовлетворяют ли координаты точек графика уравнению $y=2x^2-12x+18$?
3) Если вы считаете, что график построен неправильно, то постройте его правильно.

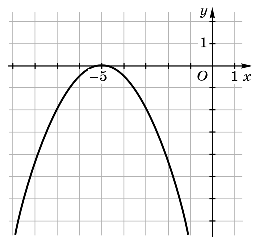


Рис. 88

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 93)

- **Текст – поиск ошибок**

Тексты, ориентирующие учащихся на поиск ошибок, а также на объяснение их причин, формируют готовность анализировать неправильные ответы. Умение видеть ошибки, объяснять их причины, прогнозировать возможные ошибки является одним из полезнейших умений, лежащих в основе способности осуществлять самоконтроль. Учебные тексты построены так, чтобы после нахождения ошибок и объяснения причин их появления учащиеся имели возможность дать правильное решение и обосновать его.

Проверьте решения:

```
а)  _4620 |15         б)  _49,6 |8          в)  _4620 |15
     45   |308             40   |51,2            45   |38
     _120                  _9                    _120
      120                   8                     120
        0                  _16                      0
                            16
                             0
```

Какое из них верное? Объясните, как появились ошибки в других решениях.

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 212)

Игра «Обиды Нулика»

Обида первая

«Я часто болею, когда мне мало уделяют внимания. Дело не столько во внимании, сколько в том, что, пренебрегая мною, читатель получает неправильный результат».

Вот наглядные примеры:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}137\\204\end{array}\\ \hline 548\\ +\,274\\ \hline 3288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}734\\60\end{array}\\ \hline 4404 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}7056\\8\end{array}\\ \hline 6048 \end{array}$$

На что обиделся Нулик, увидев эти примеры?

Обида вторая

«Видимо, невнимание ко мне позволяет многим умножающим не только выталкивать меня с того места, где я нужен, но и ставить меня туда, где я не обязателен. И я вынужден там зря стоять из-за чьей-то забывчивости».

В следующих примерах помогите Нулику разобраться, где он необходим. В этом случае подчеркните его, а где можно без нуля обойтись – зачеркните.

$0{,}50 \cdot 4$; $0{,}25 \cdot 2$; $0{,}2 \cdot 50$; $10{,}2 \cdot 0{,}1$;

$30{,}3 \cdot 0{,}20$; $0{,}60 \cdot 200 = 0{,}6 \cdot 200 = 120{,}0 = 120$.

На что обиделся Нулик, увидев эти примеры?

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 128)

Найдите ошибки, допущенные при раскрытии скобок в алгебраическом выражении:

а) $-(5x-4) = -5x-4$; б) $-2(x+3) = -2x+6$;

в) $-2(3x-2) = 6x-2$; г) $-(-5-x)+2(3-4x) = 5-x+6-4x$.

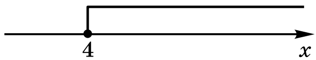
1) В каких случаях знак не был изменен на противоположный?
2) В каких случаях одно из слагаемых забыли умножить на множитель, стоящий перед скобкой?
3) В каких случаях допущены какие-то другие ошибки?

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 155)

При решении каждого из следующих неравенств допущено не менее трех ошибок. Найдите их. Каковы, на ваш взгляд, причины их возникновения?

а)

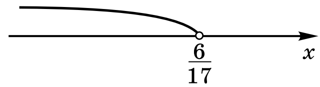
$$3x + 7 > 5(x - 2) - (2x + 1);$$
$$3x + 7 > 5x - 10 - 2x + 1;$$
$$3x - 5x - 2x > -10 + 1 - 7;$$
$$-4x > -16;$$
$$x > 4.$$



Ответ: $(4; \infty)$.

б)

$$\frac{3x+5}{4} - 1 < \frac{x-2}{3} + x;$$
$$3(3x+5) - 1 < 4(x-2) + 12x;$$
$$9x + 15 - 1 < 4x - 8 + 12x;$$
$$9x - 4x + 12x < 15 - 1 - 8;$$
$$17x < 6;$$
$$x < \frac{6}{17};$$



Ответ: $\left(-\infty; \frac{6}{17}\right)$.

Решите неравенства правильно. Как предупредить появление ошибок при решении линейных неравенств?

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 142)

Задание 7. В контрольной работе по теме «Квадратные уравнения» среди других заданий было задание с параметром: при каком значении a уравнение $(a - 1)x^2 - 2(a^2 - 1)x + a^3 + a^2 - 5a + 7 = 0$ имеет два равных корня?

Один из учеников записал в своей тетради следующее решение.

Квадратное уравнение имеет два равных корня, если его дискриминант равен нулю. Составим выражение для дискриминанта с четным вторым коэффициентом:

$$(a^2 - 1)^2 - (a - 1)(a^3 + a^2 - 5a + 7).$$

Приравняем дискриминант к нулю и упростим:

$$(a^2 - 1)^2 - (a - 1)(a^3 + a^2 - 5a + 7) = 0;$$
$$a^4 - 2a^2 + 1 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 + 5a^2 - 5a - 7a + 7 = 0;$$
$$4a^2 - 12a + 8 = 0;$$
$$a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа 2 и 1.

Ответ: при $a = 1$ и $a = 2$ уравнение имеет два равных корня.

Учитель, только взглянув на ответ, сразу же сказал, что значение $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи. Почему учитель сделал такой вывод? Что не учел ученик при планировании своих действий? Как он должен был проконтролировать полученный результат?

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 187)

3.13. Рефлексия собственной интеллектуальной деятельности

- **Текст – рефлексия методов решения**

Тексты этого типа позволяют учащимся получить сведения о различных методах решения математической проблемы, ориентируют на их анализ, учат выбирать удобный для себя способ решения (иными словами, учащиеся не только накапливают процедурные знания в области математической деятельности, но и осознают их внутреннее «устройство»). Методические приемы разработки таких текстов – это предъявление нескольких способов решения математической проблемы и организация их обсуждения; предложение рассмотреть и оценить решение «другого ученика» с точки зрения возможности получения правильного ответа на поставленный вопрос и т. д.

Ниже приводится текст, с помощью которого учащиеся учатся анализировать и оценивать составные компоненты метода решения.

Как бы вы стали проверять решение любого примера на сложение и вычитание? Окажутся ли полезными для вас такие советы:

а) при сложении и вычитании в столбик сохраняйте позицию запятой;
б) делайте проверку сложения перестановкой слагаемых, проверку вычитания – сложением;
в) делайте приближенную оценку результата.

Что бы вы добавили к этим советам? В какой последовательности вы бы стали их применять?

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 186)

1) Найдите значения выражений $6x$; $\frac{4x}{9}$; $2\frac{2}{3}x$, если x принимает значения: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $0{,}25$; 2; -3; $\frac{9}{2}$; $-15\frac{3}{4}$.
2) Какие из следующих действий вам пришлось выполнить при вычислении произведений: а) сокращение дробного выражения; б) приведение дробей к наименьшему общему знаменателю; в) сравнение чисел; г) сравнение модулей чисел; д) определение знака произведения; е) почесывание затылка; ж) представление десятичной дроби в виде обыкновенной; з) выделение целой части числа; и) представление числа в виде неправильной дроби; к) доказательство

равенства дробей; л) нахождение произведения обыкновенных дробей?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 138)

Рефлексия методов решения предполагает сравнение различных методов решения одной и той же задачи.

1) Найдите значение дроби $\frac{5a^3+5a+170}{a^2+1}$ при $a=13$.

Два ученика, выполняя это задание, сделали следующие записи:

I	II
Если $a=13$,	$\frac{5a^3+5a+170}{a^2+1}=\frac{5a(a^2+1)+170}{a^2+1}=$
то $\frac{5a^3+5a+170}{a^2+1}=$	$=5a+\frac{170}{a^2+1}.$
$=\frac{5\cdot 13^3+5\cdot 13+170}{13^2+1}=$	Если $a=13$, то
$=\frac{5\cdot 2197+65+170}{169+1}=$	$5a+\frac{170}{a^2+1}=5\cdot 13+\frac{170}{169+1}=$
$=\frac{10985+235}{170}=\frac{11220}{170}=66.$	$=65+1=66.$

Чем отличается одно решение от другого? Какое из них рациональнее?

2) Найдите значение дроби:

а) $\frac{3x^2-x+117}{x}$ при $x=-117$;

б) $\frac{1{,}75a^3-1{,}75b^3}{a^2+ab+b^2}$ при $a=148$, $b=248$.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 100)

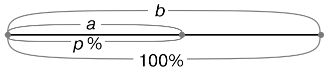
Одним из способов формирования умения рефлексировать методы учебной деятельности является работа с текстами, в которых учащимся предлагается обобщить результаты решения определенного класса задач.

Обобщим решения задач на процентные расчеты.

- Можно ли по условию каждой из рассмотренных задач составить равенство: $\frac{a}{b}=\frac{p}{100}$? Если да, то что означают буквы a, b, p для каждого типа задач?

  Выразите из этого равенства a, b, p. Расскажите, как связаны полученные формулы с решениями задач.

- Соотнесите формулы $p = \frac{a \cdot 100}{b}$; $a = \frac{b \cdot p}{100}$; $b = \frac{a \cdot 100}{p}$ с разными типами задач на процентные расчеты.



- Составьте 6 задач на процентные расчеты.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 195)

- **Текст – самооценка своих знаний и умений**

Специальные тексты заставляют учащихся задуматься о своих интеллектуальных возможностях, развивают умение объективно оценить себя. В частности, такие тексты создают условия для того, чтобы учащиеся имели возможность оценить (осознать), насколько они готовы к усвоению новой темы. Текст построен следующим образом: сначала ученикам предлагается диагностическое задание, в ходе выполнения которого они могут выяснить свои возможности относительно выполнения нового задания, задать самим себе вопросы по поводу нового для них материала. Еще один из способов развития способности к самооценке – предоставление учащимся условий для самоопределения при выполнении различного рода проверочных работ, для чего предлагаются тексты, в которых каждый ученик может выбрать уровень контроля (вариант из предложенных; задания, отмеченные определенными баллами; и т. д.).

Приведем текст (раздел «Используем квадратные уравнения при решении рациональных и иррациональных уравнений», тема «Квадратные уравнения», 8-й класс), в котором учащимся предлагается оценить свои возможности при самостоятельном изучении материала.

Мы решали квадратные уравнения различными способами, выясняли связи между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями. Где можно использовать полученный опыт работы с этими уравнениями?

Нет ли, например, уравнений, при решении которых окажутся полезными квадратные уравнения? Приведите примеры таких уравнений.

Задание 1. Приведите уравнение к квадратному уравнению, если это возможно, и решите его:

а) $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)=11x+30$;

б) $x^2(x-1)-x(x-1)=12(x-1)$;

в) $(x+1)(x^2+x-1)-2=(x-2)(x^2+x-2)$;

г) $\dfrac{2}{3+2x}-\dfrac{3}{3-2x}-\dfrac{4x^2-21}{4x^2-9}=0$;

д) $\sqrt{x^2}+x+7=2x-5$;

е) $\sqrt{3x+1}=4$;

ж) $\sqrt{x^2+x-2}=2$;

з) $\sqrt{2x^2+x+6}=x+2$;

и) $\dfrac{5}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+2}=7$.

Возможно, полностью справиться с данным заданием вам не удалось. В этом случае не забудьте вернуться к нему, выполнив другие задания параграфа. (*К другим заданиям относятся задания-помощники, где рассматриваются методы приведения различных уравнений к квадратным.*)

...

Вернемся теперь к заданию 1. О каких уравнениях из этого задания вы можете сказать, что их решение сводится к решению квадратных уравнений?

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 124, 129)

Самооценка знаний и умений у учащихся происходит при выборе формы контроля.

Предлагаем вам особую контрольную работу – рейтинговую.

В контрольной работе 19 задач, и у каждой задачи свой «вес» – количество баллов, причитающихся за верное решение. Цель решающего – за время, отведенное на контрольную работу, нужно набрать как можно больше баллов. Каким образом этого достичь? Взяться ли за решение самых «весомых», но одновременно и самых трудных задач? Или же не рисковать и потратить время сначала на решение большого числа легких задач? Тут у каждого из вас свобода выбора.

И последнее. Время, отводимое на выполнение контрольной работы, может быть установлено учителем, родителями, друзьями или самим читателем...

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 179)

- **Текст – учебная самодиагностика**

Самодиагностике способствуют учебные тексты, которые создают условия для того, чтобы учащиеся могли оценить свои знания и проанализировать особенности своей учебной деятельности.

Какие знания и умения по разделу «Корни второй, третьей степени» в теме «Действительные числа» нужны, по вашему мнению, выпускнику 9-го класса на экзамене?

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 33)

Подготовьте сообщение на тему «Трудности при решении уравнений методом замены переменных. Способы их преодоления».

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 101)

Выполните сложение алгебраических выражений:

а) $\dfrac{7a}{3(a-b)} - \dfrac{3a}{2a-2b} + \dfrac{a}{6(a-b)}$;

б) $\dfrac{2b}{a^2+ab} + \dfrac{3a}{ab+a^2} - \dfrac{2b^2}{ab^2+a^2b}$;

в) $\dfrac{x-y}{y+x} + \dfrac{x+y}{y-x} + \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$;

г) $\dfrac{x^2+x+3}{x^3+1} + \dfrac{x-2}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{x+1}$;

д) $\dfrac{2}{(x-a)(b-a)} - \dfrac{2}{(b-x)(a-b)} + \dfrac{3}{(x-a)(x-b)}$;

е) $a^2+ab+b^2+\dfrac{b^3}{a-b}$; ж) $\dfrac{a-30y}{a^2-100y^2} - \dfrac{10y}{10ay-a^2}$.

Найдите ответы среди алгебраических выражений:

а) $\dfrac{3a}{a-b}$; б) $\dfrac{5x}{x-a}$; в) $\dfrac{3}{a+b}$;

г) $\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; д) $\dfrac{a}{a-b}$; е) $\dfrac{2b^2+3a^2-2}{ab(a+b)}$;

ж) $\dfrac{-2xy}{x^2-y^2}$; з) $\dfrac{x}{x^2-x+1}$; и) $\dfrac{3a^2-3b^2-2ab}{2(a^2-b^2)}$;

к) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$; л) $\dfrac{a^3}{a-b}$; м) $\dfrac{a-10y}{a(a+10y)}$;

н) $\dfrac{3a}{a+4}$.

Были ли у вас ошибки? Объясните, в чем их причина.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 112–113)

Оценке собственных возможностей учащихся по изученной теме способствуют тексты, в которых учащимся предлагается выбрать уровень контроля.

Проверьте себя 4

Выберите и выполните один из вариантов проверочной работы.

Вариант 1

1. Найдите произведение многочленов:
   а) $x^2(2x+3)$, б) $(2a+3b)(4a-3)$; в) $(x-1)(x^2+x+1)$.
2. Найдите числовое значение выражения:
   а) $(2p^2-1)(1+2p^2)$ при $p=-\frac{1}{2}$.
   б) $(a-2)(a+2)-(a^2+4)$ при $a=1{,}13$.
3. По течению реки катер прошел некоторое расстояние за 2 ч. На обратный путь он затратил 2 ч 15 мин. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

Вариант 2

1. Найдите числовое значение алгебраического выражения
   $(p-q)(3p^2+2pq-5q^2)-(q-p)(5q^2-2pq)$ при $p=2$, $q=-\frac{3}{5}$.
2. Докажите, что при любом натуральном значении n значение алгебраического выражения $n(n+5)-(n-3)(n+2)$ кратно 6.
3. По течению реки катер прошел за 7 ч столько же километров, сколько он проходит за 8 ч против течения. Собственная скорость катера 30 км/ч. Найдите скорость течения реки.

Вариант 3

Составьте проверочную работу по теме «Умножение многочленов».

Вариант 4

Придумайте и опишите ситуации, в которых применяется умножение многочленов.

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 48)

- **Текст – психологический комментарий**

Осознавать свои индивидуальные возможности учащимся помогают не только учебные тексты, содержащие предметные задания, но и тексты особого типа, в которых излагаются сведения об определенных свойствах интеллекта и психологических основах успешной познавательной деятельности. Такие тексты включены в учебные книги (5–6-е классы) и практикумы (7–9-е классы) под названием «Психологический комментарий». В каждом психологическом комментарии содержатся метакогнитивные сведения об основных интеллектуальных способностях и психологических особенностях интеллектуальной деятельности (с использованием простейших процедур интеллектуальной самодиагностики и интеллектуального тренинга).

В 5-м классе в учебной книге по теме «Натуральные числа и десятичные дроби» предлагаются четыре психологических комментария, с помощью которых учащиеся узнают о роли образов в мыслительной деятельности; особенностях памяти; основных мыслительных операциях (анализе, синтезе, сравнении, обобщении); свойствах внимания. В рамках темы «Положительные и отрицательные числа» представлено несколько психологических комментариев, связанных с характеристиками разных познавательных стилей (в связи с разными познавательными позициями героев сюжета в виде их психологических портретов).

В 6-м классе в рамках темы «Рациональные числа» в психологическом комментарии обсуждаются правила поведения исследователя, то есть человека, который, столкнувшись с новой, необычной проблемой, может справиться с ее решением. В частности, анализируются четыре основных правила: «Старайся помнить об инерции собственного мышления», «Научись задавать вопросы», «Формулируй и обосновывай гипотезы», «Используй эвристические приемы».

В практикум 7-го класса включен психологический комментарий, посвященный двум вопросам, касающимся особенностей устройства знания: «Признаки объектов как основа понимания содержания понятий» и «Декларативные, процедурные и личные знания как условие успешной познавательной деятельности».

В практикуме 8-го класса представлен психологический комментарий «Свойства продуктивного мышления», в котором выделяются свойства продуктивного мышления (рациональность, критичность, рефлексивность, гибкость, креативность) и приводятся задания, помогающие оценить меру развития этих качеств.

В практикум 9-го класса входит психологический комментарий «Мысленный эксперимент как условие открытия новых знаний», раскрывающий роль способности к концептуализации – способности порождать новые знания за счет процедур обобщения, абстрагирования, идеализации, моделирования и интерпретации, а также описывается мысленный эксперимент на примере исследования численности популяции.

В процессе работы с материалами «Психологических комментариев» создаются условия для того, чтобы ученик мог достаточно быстро почувствовать эффект усиления того или иного интеллектуального свойства и пережить своего рода «психологический инсайт» (в виде удивительного для него увеличения объема запоминания при опоре на смысловые связи, большей легкости понимания математических понятий при использовании образов, неожиданного превращения «сложной» задачи в «простую» при условии преодоления инерции собственного мышления, осознании преимуществ продуктивного мышления и возможностей мысленного эксперимента).

3.14. Готовность работать с противоречивой информацией

- **Текст – проблематизация**

Для формирования открытой познавательной позиции необходимы тексты, в которых учащиеся сталкиваются со сведениями, противоречащими их представлениям и прошлым знаниям. Такие тексты учат школьников узнавать критические ситуации, возникающие в их опыте, видеть точки разрыва между прошлым опытом и возникшей задачей, воспитывают чувствительность и адекватное отношение к противоречиям, приучая рассматривать последние как сигнал для развертывания интеллектуального поиска.

В учебной книге для 5-го класса в начале темы «Положительные и отрицательные числа» противоречие используется как прием мотивации на необходимость изучения новых (отрицательных) чисел в рамках диалога героев сюжета учебной книги.

Сколько будет 6–8

Говорящий Сверчок. Мой юный друг Пиноккио, продолжим занятия математикой.

Пиноккио. Опять учиться? Но я уже все умею!

Говорящий Сверчок. Все?

Пиноккио. Складывать умею? Умею! Вычитать умею? Умею! Делить-умножать тоже умею. Не верите? Дайте мне любое задание, я вам докажу!

Говорящий Сверчок. Что ж, вот тебе задание:

$6+4=$	$6-4=$	$6\times4=$	$6:4=$
$6+6=$	$6-6=$	$6\times6=$	$6:6=$
$6+8=$	$6-8=$	$6\times8=$	$6:8=$

(*Пиноккио быстро-быстро вычисляет и записывает результаты. Нерешенным остается только один пример.*)

Пиноккио. А это что такое: $6-8=?$ Такого числа, которое можно прибавить к 8 и получить 6, нет. Из шести восемь, уважаемый Говорящий Сверчок, не вычитается!

Говорящий Сверчок. Не вычитается? В самом деле, я увлекся и забыл, что мы не умеем вычитать из меньшего натурального числа большее.

Пиноккио. А что, кто-то такое умеет? Умеет вычитать из меньшего большее?

Говорящий Сверчок. Кое-кто, говорят, умеет.

Пиноккио. Может, он просто хвастается?

Говорящий Сверчок. Итак, с твоей точки зрения, разность $6-8$ смысла не имеет. Давай-ка я ее вычеркну.

Пиноккио. Погодите, погодите! Надо же сначала разобраться! Тут же какая-то хитрая тайна! Так... Кто сказал, что этот пример решить нельзя?

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 5–6)

Следующий текст подводит учащихся к противоречию и ставит их перед необходимостью соотнесения прошлого опыта с возникшей новой задачей.

О делимости числа на 2 и на 5 мы можем судить только по последней цифре в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с десятка (10; 100; 1000 и так далее), делятся на 2 и на 5.

О делимости числа на 4 мы можем судить по двум последним цифрам в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с сотни (100; 1000 и так далее), делятся на 4.

О делимости числа на 8 мы можем судить по последним трем цифрам в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с тысячи, делятся на 8.

Попробуем таким же способом получить признак делимости на 3. Найдем подходящую разрядную единицу:

$10:3=3$ (ост. 1)

$100:3=33$ (ост. 1)

$1000:3=333$ (ост. 1)

$10000:3=3333$ (ост. 1)

Стоп! Кажется, продолжать этот ряд бессмысленно – и дальше каждая разрядная единица будет давать при делении на 3 в остатке 1. Что же получается?

Путь, который до сих пор приводил нас к успеху, на этот раз завел в тупик?

На самом деле, мы проделали полезную работу, и ее результаты нам пригодятся...

(Математика. 6 класс. Учебник, 2012, с. 53)

- **Текст – альтернатива**

Текст этого типа задает некоторое множество способов анализа материала, ориентирует на возможность других («иных») форм интерпретации одного и того же объекта, приучает работать с альтернативными подходами к привычному и известному. Он учит школьников умению отказываться от привычных представлений и принимать новые взгляды на изучаемые объекты и явления.

Так, в 6-м классе учащимся, уже знакомым с признаками делимости чисел, сформулированными в десятичной системе счисления, в учебной книге предстоит ответить на вопрос: «Можно ли аналогично сформулировать эти признаки, если изменить основание системы счисления?».

О признаках делимости в различных системах счисления

Познакомившись с различными системами счисления, Холмс еще раз обратился к запискам Уотсона, просматривая их с новой точки зрения.

– Возьмем двузначное число 16, – рассуждал сыщик. – Четно или нечетно (то есть делится на 2 или нет) такое число? Не будем спешить с ответом. Конечно, если нам известно, что число записано в десятичной системе счисления, то мы вправе утверждать, что это число четно: $16 = 2 \cdot 8$.

Ну, а если число записано *в семеричной* системе счисления? Тогда запись «16» означает число, состоящее из одной семерки и шести единиц. Понятно, что 6 единиц разделятся на две равные части, по 3 единицы в каждой. Но 7 на 2 нацело не делится. Следовательно, 16_7 на 2 не делится и является поэтому нечетным числом.

Проведенное рассуждение можно оформить несколько иначе, перейдя к привычной десятичной системе счисления:

$16_7 = 1 \cdot 7 + 6 = 13$.

Получили нечетное число – это видно по его записи в десятичной системе счисления.

В девятеричной системе счисления получится

$16_9 = 1 \cdot 9 + 6 = 15$, то есть снова нечетное число.

А что произойдет, если взять любое нечетное основание системы счисления, большее 6? Обозначая это основание через a, получим:

$$16_a = 1 \cdot a + 6 = \underset{\text{нечетное число}}{a} + \underset{\text{четное число}}{6}$$

$a + 6$ — нечетное число.

Значит, знакомый нам признак делимости на 2 верен не для всех систем счисления. Он будет верен лишь для систем счисления с четным основанием.

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 88)

При введении числовой последовательности предлагается два альтернативных договора оплаты труда, рассмотрение которых служит основой для изучения нового понятия.

Между работником и работодателем должен быть заключен трудовой договор. Предлагаются два варианта оплаты труда:

1) работнику в первый день работы выплачивается 3 руб., во второй – 5 руб., в третий – 7 руб. и так далее, за каждый последующий день работы выплачивается на 2 рубля больше, чем за предыдущий;
2) работодатель выплачивает работнику за первый день 3 коп., а за каждый следующий день удваивает оплату за предыдущий день (то есть во второй день – 6 коп., в третий – 12 коп., в четвертый – 24 коп. и так далее).

Сколько денег будет выплачено работнику в определенный n-й день работы и сколько он заработает за первые n дней работы по каждому из вариантов договора?

Какой из вариантов договора выгодней для работника? Будет ли это зависеть от срока работы?

(Алгебра: учебник для 9 класса, 2013, с. 224)

- **Текст – столкновение разных точек зрения**

Важную роль играют тексты, которые учат школьников смотреть с разных позиций на один и тот же математический объект, менять свою точку зрения в зависимости от возникающей ситуации. Такие тексты формируют умение принять и понять мнение другого человека, лежат в основе готовности к поливариантным решениям.

Задание 1. Попробуйте дать ответ на вопрос задачи.

Два прогулочных теплохода совершают рейсы от одной пристани до другой и обратно. Но один теплоход плывет по реке, а другой – по озеру. Собственные скорости теплоходов и расстояния между пристанями одинаковы. Одинаковое ли время потребуется на прогулку по озеру и по реке? Если нет, то какое из них больше?

Какой ответ на вопрос дали вы? Вызвал ли ваш ответ возражения одноклассников? Какие аргументы при этом приводились?

Познакомьтесь с некоторыми рассуждениями по поводу решения данной задачи.

Из разговора двух пассажиров

1-й собеседник. Время, затраченное на рейсы, должно быть у теплоходов одинаковым.

2-й собеседник. Почему?

1-й собеседник. Собственные скорости одинаковы.

2-й собеседник. Но теплоход, идущий вверх по течению реки, проигрывает во времени теплоходу, идущему по озеру.

1-й собеседник. Но этот же теплоход выиграет во времени у озерного ровно столько же, когда пойдет вниз по течению реки. Тогда их время нахождения в рейсе будет одинаковым.

Из размышлений экспериментатора

Проведем вычислительный эксперимент. Предположим, что расстояние между пристанями равно 60 км. Собственная скорость теплоходов – 25 км/ч. Скорость реки – 5 км/ч. Тогда ...

В этом частном случае задача решена – время движения теплохода по реке больше времени движения теплохода по озеру. Правда, всего-то на 0,2 часа! Может быть, в другом частном случае теплоход будет дольше идти по озеру? Или «речное» время окажется равным «озерному»?

Из записей алгебраиста

Пусть S км – длина пути теплохода в одну сторону (и по реке, и по озеру); v км/ч – собственная скорость теплохода; v_0 км/ч – скорость течения реки (она меньше, чем v).

Найдем время движения теплохода по течению реки: $\frac{S}{v+v_0}$ (ч).

Время движения против течения: $\frac{S}{v-v_0}$ (ч).

...

Итак, предложено три подхода к решению задачи. Чем они различаются? Чей подход был более доказательным для вас?

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 178–180)

- **Текст – невозможная ситуация**

Тексты этого типа включают парадоксальный учебный материал, отвечающий критериям неожиданности и «невозможности».

Получается, что число $\sqrt{2}$ среди конечных десятичных дробей мы найти не можем. Попытаемся найти его среди бесконечных периодических десятичных дробей. Тогда нам нужно определить период этой дроби.

Мы получили, что $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$, а период пока не увидели. И непонятно, как долго нужно продолжать процедуру поиска, чтобы период обнаружился, да и обнаружится ли он вообще? Может быть, проще и быстрее найти $\sqrt{2}$ среди обыкновенных дробей?

...

Поиск обыкновенных дробей нужно организовать среди дробей, находящихся между числами 1 и 2. Попытаемся найти искомую дробь среди дробей со знаменателями 2, 3, 4 и так далее.

Начнем проверять дроби со знаменателем 2. Между числами 1 и 2 находится одна такая дробь: $\frac{3}{2}$.

Квадрат этой дроби не равен двум.

Попробуем рассмотреть дроби со знаменателем 3, это $\frac{4}{3}$ и $\frac{5}{3}$. Но квадраты этих дробей также не дадут двойки. Что же делать? Испытывать дроби со знаменателем 4? А если и среди них не окажется нужного числа?

Мы пытались подобрать значение $\sqrt{2}$, но, может быть, стоит попытаться решить эту задачу в общем виде: найти такое рациональное число, чтобы его квадрат был равен 2.

...

Наше предположение о существовании рационального числа, квадрат которого равен 2, неверно. Значит, такого рационального числа не существует.

...

Квадрат, площадь которого равна 2, построить удалось, а вот записать длину его стороны пока не удается...

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 20–21)

3.15. Выбор способа деятельности

- **Текст – выбор способа деятельности**

Средствами текстов учащимся предоставляется возможность выбора способов учебной деятельности за счет учета их познавательных предпочтений (например, выбор способа изучения нового материала или формы контроля).

Вырабатываем стратегию работы с новым уравнением

Как вы поступаете, когда сталкиваетесь с новой для вас проблемой?

Пытаетесь найти решение самостоятельно? Обращаетесь к учителю, к приятелю? Ищете информацию в учебниках, справочниках, сети Интернет?

Давайте посмотрим на эту проблему с точки зрения человека, который хотел бы получить знания из справочника. Если вы хотите разобраться с тем, как решать квадратные уравнения самостоятельно, без справочника, вы можете обратиться к параграфу 22 (*в параграфе 22 учебника учащимся предлагается педагогическая поддержка для выбора способа деятельности*).

Вы можете использовать различные справочники, энциклопедии.

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 95)

Выводим формулу корней квадратного уравнения

Вы уже знаете, что существует формула корней квадратного уравнения. Как она может быть получена?

Задание 1. Постарайтесь получить формулу $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ самостоятельно или используя математическую литературу.

Если вы вывели данную формулу, то поясните, какие знания вам для этого потребовались. Сравните свой вывод с тем, что предложен в задании 3.

Если же формулу корней квадратного уравнения вам получить не удалось, то поработайте со следующими тремя заданиями...

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 100)

Выберите и выполните один из вариантов проверочной работы.

Вариант 1

1. Решите уравнение:
а) $x^2+x-12=0$; б) $4x^2=9x-2$; в) $6x+5=x^2+5$;
г) $-4x^2+64=0$; д) $(x-2)(x+2)=7x-14$.

2. Какие из уравнений:
а) $2x^2-3x+1=0$; б) $x^2-2x+1=-5$; в) $x^2 = x-\frac{1}{4}$;
г) $x^2-7x+10=0$; д) $x^2-3x-10=0$.
1) не имеют действительных корней;
2) имеют два одинаковых корня;
3) имеют положительные корни?

3. Составьте квадратное уравнение, если даны его корни:
а) 2 и -3; б) 0 и $-\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

$$а)\ \sqrt{2}z^2 + 4\sqrt{3}z - 2\sqrt{2} = 0; \qquad б)\ 3x^2 - 8ax + 8a - 3 = 0;$$
$$в)\ 2x^2 + 5x + q = 0.$$

2. Сократите дробь:

$$\frac{6a^2 - 7a - 3}{2a^2 - a - 3}.$$

3. Укажите несколько значений q, при которых оба корня уравнения $2x^2+5x+q=0$ расположены на числовой оси левее нуля.
4. Покажите, что алгебраическое выражение $x^2-\sqrt{3}(m-3)x+m^2-0,5m+22$ ни при каких значениях переменных m, x не может принимать значение, равное -2.

Вариант 3

Напишите сочинение на тему «Квадратное уравнение».

Вариант 4

Составьте разноуровневую проверочную работу по теме «Решение квадратных равнений».

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 91)

Большие возможности для формирования умения выбирать способ деятельности предоставляют тексты рабочих тетрадей для 5–6-х классов.

Каждая рабочая тетрадь (всего их четыре – в соответствии с основными темами, представленными в УМК МПИ для 5–6-х классов) включает три раздела: «Тренируемся в действиях над числами», «Найдите связи и закономерности», «Исследовательские и творческие задания».

- **Текст – выбор познавательной позиции**

Средствами текстов этого типа создаются условия для осознания личного отношения к учебному материалу, актуализации обыденного (житейского) опыта ученика, возможности высказать свое мнение по поводу различных аспектов учебной деятельности.

В конце изучения раздела «Проценты» (6-й класс) учащимся предлагается текст, который поможет им задуматься о роли данного понятия в окружающем мире в контексте его личного отношения.

Представьте себе, что вы оказались в стране, где жители не пользуются процентами. Стали бы вы объяснять, что такое процент? Если да, то как бы вы стали это делать?

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 191)

Позитивному отношению к процессу учения способствуют высказывания персонажей, которые сопровождают учащихся в учебных книгах (5–6-е классы). Приведем фрагменты таких текстов.

На следующее утро Снусмумрик вдруг вспомнил свои кругосветные путешествия и размечтался.

– Скоро я снова отправлюсь в путь, – подумал он. – Только вот разберусь окончательно с этими десятичными дробями и отправлюсь...

Муми-тролль, узнав, что Снусмумрик намерен отложить путешествие, страшно обрадовался. И, переполненный теплым чувством к десятичным дробям, принялся вместе со Снусмумриком размышлять о том, на что они годны и что бы такое с ними можно было делать...

(Математика: учебная книга и практикум
для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 69)

А как до этого додумался, так и другая мысль в голову пришла: **любую ли обыкновенную дробь можно в виде десятичной дроби представить?**

– Пока ответ не найду, пока все до тонкостей не разберу, – думает Иван-Царевич, – Елене на глаза и показываться не буду...

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 30)

На познавательную позицию обучающихся оказывают влияние тексты, которые позволяют ученику выбрать предпочитаемый способ решения, соответствующий его познавательным интересам.

Вычислите: 1. $1,25 : 0,2 + 3\frac{3}{4} \cdot 5$; 2. $\dfrac{142,7 \cdot 8\frac{1}{2} - 4,27 \cdot 85}{34 \cdot 1\frac{47}{50} + 3\frac{2}{5} \cdot 10\frac{3}{5}}$;

3. $\dfrac{24{,}8 \cdot 0{,}7 - 5{,}48 \cdot 7}{3,24 \cdot 1{,}4 + 5{,}76 \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 0{,}3}$.

Можно решить три примера одним способом, а можно один пример – тремя способами. Каждое решение оценивается пятью баллами.

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 172)

Ответьте на вопросы:

1) Какого рода задания необходимы были вам для усвоения тождеств $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$?
2) Какие задания вам не хотелось выполнять:
   - слишком простые;
   - слишком трудные;
   - неинтересные;
   - громоздкие?
3) Какие задания пришлись вам по душе? Почему?

(Алгебра – 7: практикум, 2013, с. 65)

- **Текст – индивидуальный познавательный стиль**

Развивающие учебные тексты предоставляют возможность каждому ученику: 1) проявить свой познавательный стиль; 2) осознать собственный познавательный стиль с учетом его «слабых» и «сильных» сторон; 3) освоить множество других познавательных стилей, обогатив тем самым репертуар индивидуального интеллектуального поведения. Наиболее оптимальные условия для реализации этих требований предоставляют тексты сюжетных учебных книг (5–6-е классы).

В текстах учебных книг проекта МПИ особое внимание уделено учету и развитию таких индивидуальных познавательных стилей учащихся, как: *стили кодирования информации* (словесно-символический, визуальный, предметно-практический, сенсорно-эмоциональный), *стили переработки информации* (импульсивность–рефлективность, аналитичность–синтетичность, полезависимость–поленезависимость, нетолерантность–толерантность к противоречиям), *стили постановки и решения проблем* (исполнительский, исследовательский).

Осознать существование разных стилей кодирования и переработки информации и отрефлексировать свой собственный познавательный стиль учащимся помогают персонажи сюжетных историй. В частности, в рамках сюжетной истории о приключениях Пиноккио по мотивам сказки К. Коллоди (тема «Положительные и отрицательные числа», 5-й класс) каждый из персонажей является носителем определенного способа (стиля) познавательной деятельности. Приведем краткие психологические характеристики персонажей (в тексте соответствующей учебной книги этот материал представлен в виде психологического портрета каждого из героев сюжета).

Пиноккио (толерантный к противоречиям, поленезависимый стиль переработки информации) отличает неуемная фантазия, он импульсивен, любознателен, склонен задавать каверзные вопросы, критиковать и выдвигать неожиданные идеи, его психологическая роль – «возмутитель интеллектуального спокойствия». *Селеста* (словесно-символический стиль кодирования информации в сочетании с аналитическим стилем переработки информации) любит «все разложить по полочкам», она, обладая аналитическим умом, склонна к строгим последовательным рассуждениям, выделению существенных признаков изучаемых понятий и связей между ними, ей важно всему дать правильное словесное определение, систематизировать знания в виде конспектов. Художник *Арти* (визуальный стиль кодирования информации) отвечает за визуализацию математического знания, ему «легче один раз увидеть, чем сто раз услышать». *Тито и Вито* (предметно-практический стиль кодирования информации) любую математическую идею стремятся рассмотреть на примере практической ситуации, ибо для них понять – значит уметь сделать. *Пьеро* (сенсорно-эмоциональный стиль кодирования информации), будучи артистической натурой, прежде всего ищет в математике поэзию, гармонию, обращая внимание ребенка-читателя на эстетические аспекты математических понятий, он молчалив, склонен эмоционально оценивать информацию, любит использовать метафоры.

В свою очередь, *Говорящий Сверчок* (рефлективный стиль переработки информации) оценивает, определяет направление дальнейшей работы, помогает находить ошибки и подводить итоги, он склонен к обоснованию и обсуждению идей, его задача – руководить и контролировать. *Тортилла* (синтетический стиль переработки информации) обеспечивает включение отдельных математических фактов в целостную картину развития научных знаний.

Тексты учебных книг «Делимость чисел» и «Рациональные числа» (6-й класс) построены как модель исследовательского поведения. В частности, сюжет детективной истории с участием Шерлока Холмса включает учеников в исследовательский режим работы в условиях поиска решения поставленной в этой книге проблемы: «Отыскать способ нахождения всех натуральных делителей данного натурального числа» (при этом одновременно ученики имеют возможность работать в режиме исполнительской деятельности). В другой сказочной истории учащиеся вместе с главным героем – Иваном-Царевичем – исследуют «новое царство» (множество рациональных чисел).

В 7–9-х классах продолжается работа по формированию персонального познавательного стиля учащихся средствами учебных текстов, включая усвоение как разных стилей кодирования информации, так и разных стилей решения проблем.

Приведем три фрагмента учебного текста (раздел «Формула куба суммы и куба разности»), которые позволяют учащимся использовать разные стили кодирования информации (словесно-символический, визуальный и сенсорно-эмоциональный) (7-й класс).

Возведите в куб двучлены $a+b$ и $a-b$.

Можно ли использовать при этом уже известную формулу квадрата суммы?

Если вы правильно выполнили задание, то получили равенства:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Формулы куба суммы и куба разности двух алгебраических выражений – так называются эти формулы сокращенного умножения.

Опишите правые части формул: укажите число одночленов, их коэффициенты, знаки коэффициентов, показатели степеней.

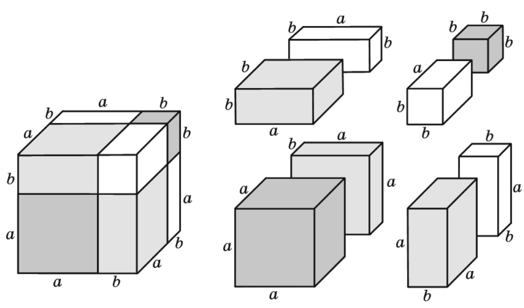
Прочтите эти формулы...

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 110)

Составьте схему формулы куба суммы.

Рассмотрите рисунок, на котором изображен куб и его части. Поясните с помощью рисунка формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Получите из этой формулы такую: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.



(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 111)

Чтобы в изучении данной формулы увидеть аналогию с изучением предыдущих формул, определите цель каждого задания.

Придумайте рекламные объявления сами или выберите из тех, что найдете на рисунке.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 109–110)

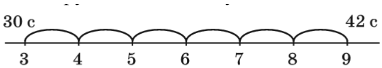
Учебные тексты для 7–9-х классов включают задания, которые показывают учащимся, что одну и ту же задачу можно решать по-разному в зависимости от индивидуальных познавательных предпочтений. Ниже приводится пример такого учебного текста (раздел «Формула n-го члена арифметической прогрессии») (9-й класс).

Рассмотрите разные решения одной и той же задачи.

Задача. Спортсмен-легкоатлет пробегает каждый последующий круг на 2 с дольше, чем предыдущий. Девятый круг он пробежал за 42 с. За какое время он пробежал десятый круг? Третий круг?

Решение:

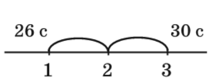
- Саша прочитал задачу и сказал, что десятый круг спортсмен пробежал за 44 с. Как он это узнал?
- Володя для ответа на вопрос «За какое время пробежал спортсмен третий круг?» сделал следующие записи:



$42-2\cdot 6=30$ (с) – третий круг.

Объясните его запись.

- Сергей продолжил рассуждения Володи и сделал следующую запись:



$30-2\cdot 2=26$ (с) – первый круг.

- Вася сказал, что последовательность значений времени, за которое пробегает спортсмен первый, второй и т. д. круги, является членами арифметической прогрессии. Как он это узнал?
- Наташа сказала, что на все вопросы в задаче можно ответить с помощью формулы n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$. Проверьте это утверждение.

(Алгебра – 9: практикум, 2016, с. 188–189)

Наиболее благоприятные условия для проявления индивидуальных стилей решения проблем возникают в тех случаях, когда учащимся предоставляется возможность самостоятельно строить свое интеллектуальное поведение (например, работая с текстами проектных заданий; заданий, формирующих умение выбирать либо составлять задачи в соответствии со своими познавательными склонностями и предпочтениями). Например, в рамках темы «Квадратные уравнения» учащимся предлагается три задания, в которых нужно самостоятельно составить задачи (8-й класс).

1. Подберите данные к задаче.
   Длина прямоугольного участка равна ... м, ширина – ... м. На сколько метров надо уменьшить длину и ширину участка, чтобы:
   а) его площадь уменьшилась вдвое;
   б) периметр уменьшился на ... м;
   в) его площадь уменьшилась вдвое, а периметр уменьшился на... м;
   г) его площадь увеличилась, а периметр уменьшился?
   При любых ли данных задача будет иметь решение?..
2. Составьте задачу, при решении которой может быть использована следующая схема:
   а) $\boxed{\text{Производительность по плану}} - \boxed{\text{Фактическая производительность}} = \boxed{?}$
   б) $\boxed{\text{Работа по плану}} = \boxed{\text{Фактическая работа}}$
3. Составьте такую задачу, для решения которой можно использовать уравнение:
   а) $\dfrac{11}{20+x} + \dfrac{9}{20-x} = 1$; б) $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{6}{x}$;
   в) $(x+1)(x-7) = 48$.

Измените условие задачи так, чтобы для ее решения стало пригодным уравнение:

а) $\frac{110}{20+x}+\frac{90}{20-x}=10$; б) $\frac{15}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{6}{x}$;

в) $(x-1)(x+3)=60$.

(Алгебра – 8: практикум, 2015, с. 112–113)

Таким образом, назначение развивающих учебных текстов этого типа заключается не только в учете индивидуальных познавательных стилей, когда средствами учебного текста создаются условия для проявления индивидуальных предпочтений в способах кодирования информации и решения проблем, но и в обогащении стилевого репертуара учебной деятельности, когда учащиеся приобретают готовность использовать разные способы работы с информацией.

- **Текст – догадка**

Текст ориентирует ученика на высказывание догадки и опережающих идей, поддерживая готовность доверять собственной интуиции.

Сотню орехов 25 человек решили разделить между собой так, чтобы каждому досталось нечетное число орехов. Можно ли это сделать?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 2, 2013, с. 159)

В числе $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2001$ нашли сумму цифр, в полученном числе снова нашли сумму цифр и так далее. Так поступали до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое число получилось?

(Математика: учебная книга и практикум для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 162)

Что больше:

а) 2^{100} или 10^{30}; б) 10^{24} или 2^{80}; в) 2^{120} или 9^{40};
г) 35^{50} или 6^{100}; д) 2^{500} или 5^{200}?

Пример: $2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}>1000^{10}=(10^3)^{10}=10^{30}$. Следовательно, $2^{100}>10^{30}$.

(Алгебра: практикум 7 класса, с. 21)

Беседа

Для тех, кто хочет вести секретную переписку с друзьями

Однажды Фома получил от друга телеграмму. Кто такой Фома? О, это личность весьма примечательная! Никому на слово не верит, всё пытается делать по-своему. Любит, с одной стороны, находить новое решение старых проблем и, с другой стороны, использовать старые знания для преодоления новых трудностей. Любит читать разные математические книги, разыскивать в них нестандартные ситуации и находить из них выход. А больше всего любит сам такие ситуации создавать.

Так вот, телеграмма была какой-то странной. Вот что в ней было написано:

«йажзеирпончорсмёдж».

Сможете ли вы прочитать этот текст? Фома же, немного подумав, понял секрет этой телеграммы. В ней было приглашение в гости. Он решил ответить в том же духе. Сочинил ответную телеграмму и зашифровал ее таким же способом:

«приеду в субботу встречайте»,
«етйачертсвутоббусвудеирп».

Однако Фоме захотелось придумать более интересную шифровку. Он разбил текст своей телеграммы на две равные части и каждую из них зашифровал по старому методу:

«приеду в суббо	ту встречайте»,
«оббусвудеирп	етйачертсвут».

После окончания шифровки Фома захотел всю свою переписку с другом вести только зашифрованными текстами, меняя время от времени способ шифровки. Поэтому он рьяно взялся за разработку шифра...

(Алгебра, учебник для 7 класса, 2013, с. 63)

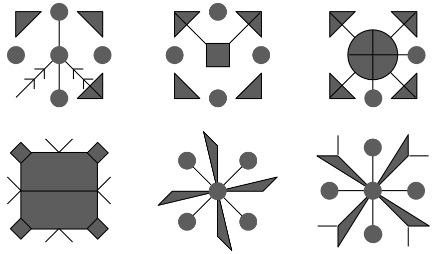
- **Текст — творческая работа**

Тексты этого типа стимулируют проявления творческой инициативы, воображения и фантазии учащихся (в том числе сочинение стихотворений и рассказов на математическую тему), способствуют формированию чувства «математической эстетики» (способность видеть красоту и изящество в математическом материале, способе рассуждения, идее и т. д.).

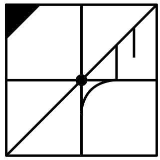
1. Какие из приведенных изображений имеют:

а) центр симметрии;

б) и центр, и ось симметрии?



2. Достройте фигуру так, чтобы она имела центр симметрии.



3. Выпишите все заглавные печатные буквы русского и латинского алфавитов, имеющие центр симметрии.

...

7. Нарисуйте узор для ковра так, чтобы он обладал центральной симметрией и чтобы не менее пяти его фрагментов, взятых по отдельности, также имели бы центр симметрии.

(Математика. 6 класс. Учебник, 2012, с. 190)

Изучите таблицу.

	Цена, р.	Количество, кг	Стоимость, р.
Товар I сорта	36	10	360
Товар II сорта	21	15	315
Смесь	27	25	675

Пофантазируйте: представьте себе, что некоторые данные в таблице обладают свойством «исчезать». Чтобы их восстановить, стали составлять уравнения.

Подумайте, какие данные «исчезли», если получились такие уравнения:

а) $(25-x)\cdot 21+36x=675$; б) $21\cdot x+36\cdot(25-x)=675$;
в) $21\cdot 15+36x=675$; г) $21x+36\cdot 10=675$;
д) $21\cdot 15+36\cdot 10=x\cdot 25$; е) $21x+36y=675$.

Сформулируйте задачу, соответствующую каждому из этих уравнений.

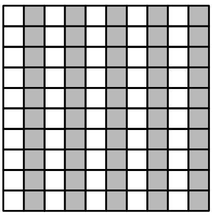
(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 158–159)

Первые сто натуральных чисел записаны в таблице.

В этой таблице можно обнаружить красивые узоры из чисел. Например, если заштриховать все клеточки с четными числами или с числами, кратными пяти, то мы увидим вертикальные полосы.

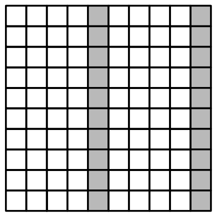
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Красивые узоры могут рождать числа, кратные не только двум и пяти.



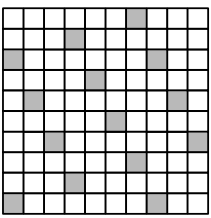
ЧЕТНЫЕ ЧИСЛА

а



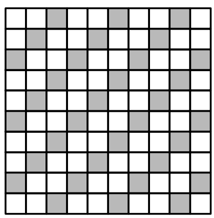
ЧИСЛА, КРАТНЫЕ ПЯТИ

б



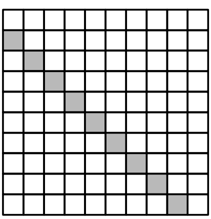
....

в



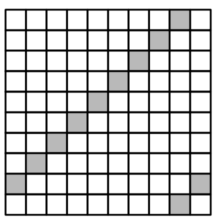
....

г



....

д



....

е

Сделайте подписи к узорам *в, г, д, е* и составьте другие числовые узоры.

(Математика: учебная книга и практикум
для 6 класса. Ч. 1, 2013, с. 187–188)

Следующий текст способствует созданию новых объектов, – как геометрических, так и алгебраических.

Последовательность (a_n) называется *периодической*, если существует такое натуральное число T (*период*), что, начиная с некоторого номера N, для всех натуральных $n \geqslant N$ выполняется равенство $a_n+T=a_n$.

Если T есть период последовательности (a_n), то 2T, 3T, 4T и так далее – тоже периоды.

Например, последовательность 1; 3; 3; 4; 1; 3; 3; 4; 1; 3; 3; 4; 1; 3; 3; ... является периодической (период T=4).

С помощью этой последовательности можно описать так называемую самопересекающуюся спираль (рисунок 130), в которой каждый член последовательности показывает величину расстояния, проходимого по линии квадратной сетки до очередного поворота; каждый поворот делается против часовой стрелки на 90°.

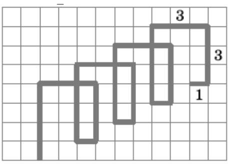


Рис. 130

Аналогично с помощью последовательности можно описать спираль и на треугольной сетке.

Изучите спирали, описываемые различными числовыми последовательностями.

1) Попробуйте на квадратной сетке изобразить спирали:

а) 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; ...

Похожая спираль на треугольной сетке описывается последовательностью 1; 2; 3; 4; 5; ...

б) 2; 1; 3; 2; 4; 3; 5; ...

Как продолжить последнюю последовательность?

2) Найдите последовательность, которая задает спираль и на квадратной, и на треугольной сетке.

3) Рассмотрите убывающие последовательности, например

8; 4; 2; 1; 1/2; 1/4; ...

Или вот такие последовательности:

1/16; 1/8; 1/4; 1/2; 1; 2; 4; ...;

2; 2; 1; 1; 3; 3; 1; 1; 4; 4; 1; ...

Постройте соответствующие спирали.

4) Приведите примеры последовательностей, которые приводят к самопересекающимся спиралям.
5) Попробуйте провести самостоятельное исследование последовательностей, с помощью которых можно описать разнообразные спирали.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 243)

- **Текст – математика в окружающем мире**

Средствами текстов обосновывается ценность математических знаний для анализа окружающей действительности, в том числе событий повседневной жизни.

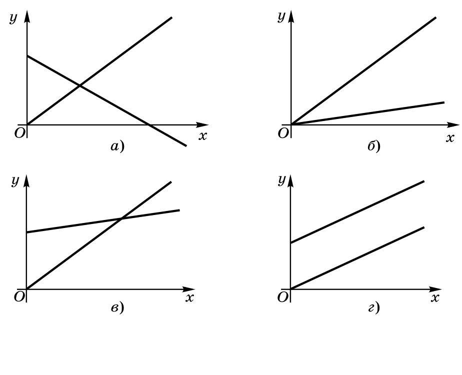
Приведем пример текста по теме «Линейная функция» (9-й класс), который помогает учащимся увидеть, как с помощью математических знаний можно анализировать события повседневной жизни.

Телефонная компания предложила два тарифа оплаты за сотовую связь:

Тариф 1: 43 рубля – начальная плата + 26 копеек за каждую минуту разговора;

Тариф 2: 44 копейки за минуту разговора без начальной платы.

1) Оплату по второму тарифу можно подсчитать по формуле $y = 0{,}44x$. Обоснуйте эту формулу. Что в ней принято за x, а что за y?
2) По какой из формул можно подсчитать оплату по первому тарифу:
   а) $y = 43 + 0{,}26x$; б) $y = 43 + 26x$;
   в) $y = 26x$; г) $y = 26 + 43x$?
   Что в этой формуле означает каждый коэффициент? Что в ней принято за x, а что за y?
3) На рисунках а)–г) даны схематические графики оплаты за связь по двум тарифам. На каком рисунке графики соответствуют предложенным компанией тарифам:



4) Тамара разговаривает 200 минут в месяц. Какой тариф из двух предложенных выгодней для нее?
5) Родители Славы дают ему в месяц 250 рублей на оплату телефонных разговоров. По какому тарифу он может за эти деньги поговорить больше времени?
6) Коля сказал, что для него нет разницы, какой тариф выбрать. Сколько минут он говорит по телефону в месяц?
7) Наташа сказала, что ей выгоднее использовать второй тариф. Сколько минут она говорит по телефону в месяц?
8) Сколько минут в месяц надо разговаривать по телефону, чтобы первый тариф оказался выгоднее?
9) В каких ситуациях встречались с линейной функцией вы? Опишите такие ситуации.

(Алгебра – 9: практикум, 2015, с. 49)

- **Текст – история математики**

В текстах этого типа представлено общекультурное значение и человеческое измерение математического материала. Тексты по истории математики носят мировоззренческий характер. Некоторые из них способствуют пониманию истории развития математического языка и тем самым создают условия для мотивации его изучения.

Уже 1600 лет назад десятичные дроби использовались в Древнем Китае. Основной мерой длины там была мера **чи**. Другие, более мелкие мерки строились таким образом, чтобы каждая последующая равнялась одной десятой части предыдущей.

В этой системе значение цифры зависело от ее места, то есть система являлась позиционной. Каждый разряд имел определенное название, связанное с мерой длины.

Например, число 2,437856 представлялось так: 2 чи, 4 цуня, 3 доли, 7 порядковых, 8 шерстинок, 5 тончайших, 6 паутинок.

1) Запишите, используя таблицу, следующие числа арабскими цифрами:
   а) 3 чи, 1 цунь, 5 долей, 6 порядковых, 7 шерстинок, 1 тончайшая, 2 паутинки;
   б) 7 чи, 3 цуня, 7 порядковых, 3 тончайших, 4 паутинки.
2) Перепишите дроби, используя названия разрядов, принятые в Древнем Китае: 4,15438; 0,43915; 2,43005; 0,00503.

Характеристика типов развивающих учебных текстов

Единица	Десятая	Сотая	Тысячная	Десятитысячная	Стотысячная	Миллионная
Чи	Цунь	Доля	Порядковая	Шерстинка	Тончайшая	Паутинка

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012, с. 172–173)

В старых книгах Мудрой Черепахи есть записи:

«Сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов – долг, имущества и долга – их разность, а если они равны – нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля – имущество, двух нулей – нуль». (Это правило составлено в первом веке нашей эры индийским математиком Брахмагуптой.)

«Если разного названия, то вычитается, если одинакового названия, то прибавляется; если положительное без пары, то становится положительным; если отрицательное без пары, то становится отрицательным». (Это правило взято из древнейшего трактата китайских математиков «Математика в девяти книгах». По-китайски это название звучит «Чжен фу».)

Переведите эти тексты на современный математический язык.

(Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 2, 2012, с. 47)

Один из первых арабских алгебраистов *Мухаммед бен Муса аль-Хорезми* (787–850, Мухаммед, сын Мусы, из Хорезма) в «Краткой книге о восполнении и противопоставлении» впервые произвел классификацию уравнений, указав пять видов квадратных уравнений:

1) «квадраты равны корням», что в современной записи означает $ax^2=bx$;
2) «квадраты равны числу», то есть $ax^2=c$;
3) «квадраты и корни равны числу», то есть $ax^2+bx=c$;
4) «квадраты и числа равны корням», то есть $ax^2+c=bx$;
5) «корни и числа равны квадратам», то есть $bx+c=ax^2$.

Мы объединяем все случаи общим видом уравнения $ax^2+bx+c=0$, имея в виду, что коэффициенты b и c могут быть как положительными, так и отрицательными.

Аль-Хорезми еще не пользовался отрицательными числами, поэтому ему пришлось вместо одного случая рассматривать все случаи по отдельности.

Для каждого случая аль-Хорезми излагает правило действий, каждый раз сопровождая это правило конкретным примером. Вот как он рассказывает об одном из случаев:

«Что касается квадратов и корней, равных числу, то если, например, ты скажешь: квадрат и десять его корней равны тридцати девяти дирхемам, то правило таково: раздвой число корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, будет шестьдесят четыре. Извлеки из этого корень, будет восемь, и вычти из этого половину числа корней, то есть пять, останется три: это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть девять».

Задание 2. Запишите в современных обозначениях уравнение, о котором пишет аль-Хорезми. Решите его.

(Алгебра: учебник для 8 класса, 2013, с. 144)

Подводя итог описанию основных типов развивающих математических текстов, важно подчеркнуть, что эти тексты сконструированы таким образом, чтобы каждый тип текста имел определенный психологический адресат – определенный компонент ментального опыта ученика. Соответственно обучение математике на основе системы развивающих учебных текстов разного типа на протяжении пяти лет (с 5-го по 9-й класс) будет содействовать не только успешному усвоению математических знаний, но и обогащению индивидуального ментального опыта каждого ученика как основы его интеллектуального роста.

ГЛАВА 4

Приемы работы с учебным текстом

4.1. Три уровня понимания текста

Школьная практика свидетельствует о том, что современные ученики испытывают серьезные трудности при работе с учебными текстами. Большинство учащихся обращаются к учебнику только после прямого указания учителя с установкой на запоминание и последующее воспроизведение нужного фрагмента текста. Однако стратегия «запомнить и воспроизвести» не только не обеспечивает понимания предметного содержания, но и, более того, блокирует развитие интеллектуальных способностей ученика.

Согласно исследованиям Е. В. Олейниковой, даже у старшеклассников умение пересказа прочитанного текста находится на очень низком уровне. Только 8% учащихся (из 150 обследованных школьников) составили пересказ, отвечающий требованиям по полноте, связности и обобщенности, причем наибольшие трудности вызвала необходимость обобщения содержания текста. Подавляющее большинство учащихся вообще не справились с этой задачей: они либо «теряли» конкретное содержание текста, либо воспроизводили его отдельные фрагменты (Олейникова, 2009).

Иными словами, традиционный учебный текст фактически не выполняет своих учебных функций, поскольку не включает ученика в интеллектуальный диалог с текстом как таковым и не является регулятором процесса понимания учебного материала. При разработке развивающих учебных текстов необходимо учитывать критическую роль чтения не только относительно формирования универсальных учебных действий (УУД), но и в связи с интеллектуальным развитием личности. Следует согласиться с мнением о том, что компетентность в чтении – это ключ к компетентности в любом другом виде человеческой деятельности (Alexander, 2005).

Чтение с самого начала подчинено его основной задаче – пониманию письменного сообщения. Компетентный читатель способен читать относительно сложные тексты с высокой степенью понимания и высоким уровнем интереса (Chall, 1983; Rand, 2002). Такой читатель способен сфокусироваться на общем смысле текста и не вязнуть на значении отдельных слов и предложений. В то же время он чувствителен и внимателен к существенным деталям и контексту, что определяет нюансы и глубину понимания основных идей текста. Важно подчеркнуть: подлинное понимание текста – это всегда выход за пределы того, что в нем непосредственно сказано.

Есть два пути превращения ученика в активного читателя, которые должны реализовываться одновременно. С одной стороны, ученику нужно предложить принципиально новый тип учебных текстов, которые, во-первых, мотивационно включают его в процесс осмысленного чтения и, во-вторых, обеспечивают его интеллектуальный рост за счет обогащения разных компонентов его ментального (умственного) опыта. С другой стороны, нужно научить ученика приемам работы с учебным текстом с тем, чтобы он мог самостоятельно извлекать нужную информацию и относиться к чтению как важнейшему ресурсу интеллектуального и личностного развития. Соответственно задача учителя – научить ученика активно взаимодействовать с информацией, используя различные приемы работы с учебным текстом.

Данная задача соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС), согласно которому содержание образования должно быть направлено на формирование универсальных учебных действий (УУД), в частности, приемов работы с учебным текстом. К универсальным учебным действиям относительно работы с учебно-научным текстом относятся аналитические умения (способы смыслового анализа текста), реконструктивные умения (способы перекодирования информации, изменение формы ее презентации, переформулирование поставленной проблемы и т. д.) и продуктивные умения (способы создание собственного высказывания, отражающего понимание изученного материала и оформленного в соответствии с требованиями научного стиля речи) (Суворова, Воюшина, Купирова, 2008). Важно подчеркнуть, что эти умения носят междисциплинарный характер, и их формирование предполагает возможность переноса способов работы с текстом в разные учебные предметы.

Приемы работы с учебным текстом

В педагогических исследованиях описаны разнообразные приемы организации взаимодействия ученика с текстом. С тем чтобы была возможность представить приемы работы с текстом в более систематизированном виде, мы исходили из представления о существовании трех уровней понимания учебного текста: 1) уровень восприятия текста, характеризующийся выделением и осознанием значений элементов текста и значения текста в целом (базовая мыслительная процедура – анализ; продукт – пересказ текста); 2) уровень преобразования текста (базовая мыслительная процедура – объяснение; продукт – модель текста); 3) уровень конструирования текста, связанный с порождением (приращением) новых значений и приписыванием смыслов, которые в явном виде не представлены в исходном тексте (базовая мыслительная процедура – интерпретация; продукт – авторский текст).

Таблица 2

Соотношение уровней понимания текста, мыслительных процедур и продуктов

Уровень понимания текста	**Базовая мыслительная процедура**	**Продукт**
Восприятие	Анализ	Пересказ
Преобразование	Объяснение	Модель
Конструирование	Интерпретация	Авторский текст

Соответственно нами были выделены три группы приемов работы с учебными текстами: 1) приемы восприятия текста (умения выделять ключевые термины и определения; различать новую и известную информацию, анализировать заголовки, иллюстрации и примеры, формулировать вопросы к тексту и т. д.); 2) приемы преобразования текста (умения структурировать содержание, устанавливать сходство и проводить аналогии, переводить информацию из словесно-символической формы в графическую, выявлять связи между элементами текста, обобщать, отыскивать и формулировать закономерности и т. д.); 3) приемы самостоятельного конструирования текста (умения создавать различные типы авторских текстов, в том числе тесты разного стиля, – в виде словарей, придуманных задач, рецензий, новых параграфов, сюжетных историй, сочинений на математические темы, проектов и т. д.).

4.2. Приемы восприятия учебного текста

Ниже перечислены основные приемы работы с текстом, обеспечивающие понимание текста на уровне полноты его восприятия и разностороннего анализа его содержания.

Комментированное чтение

В процессе чтения текста (вслух или про себя) делаются остановки и задаются вопросы на проверку понимания или на прогнозирование дальнейшего содержания (сначала такие вопросы задаются учителем, потом – и самими учениками). Места остановок и вопросы учитель продумывает заранее.

Экскурсия по книге

На самом первом этапе знакомства с материалом учебника (учебной книги, тетради для самостоятельной работы и пр.) учащимся предлагается пролистать текст, рассмотреть рисунки, познакомиться с оглавлением и т. д. Ученикам предлагается не читать текст абзац за абзацем, а в целом оценить содержание изучаемого параграфа, просмотрев названия подзаголовков, обратив внимание на основные рисунки, прочитав выделенные полужирным шрифтом определения (о чем в данном параграфе пойдет речь; как это связано с тем, что я уже знаю; простым или сложным показался учебный материал и т. д.).

Работа с заголовком заключается в том, что на основе анализа заглавия строится смысловая догадка о возможном содержании текста и формулируется ряд предположений о возможном содержании параграфа. После прочтения текста нужно вернуться к высказанным догадкам о его содержании и проверить, в правильном ли направлении размышлял тот или другой ученик.

Важную роль смысловых ориентиров играют эпиграфы. Можно попросить учеников прочитать эпиграф и высказать свои соображения о том, как он может быть связан с содержанием текста.

На основе такой работы с текстом могут быть определены цели чтения, вид чтения, уровень понимания текста, сделан прогноз относительно последующих разделов учебника (учебной книги).

Ключевые слова

Суть этого приема заключается в том, что на основе общего просмотра текста (до его внимательного чтения) ученики выбирают наиболее важные, с их точки зрения, либо незнакомые им слова и словосочетания. Фактически речь идет о выборе слов-сигналов, обращающих внимание учащихся на главные содержательные линии текста.

После выделения нескольких таких слов учитель помогает выяснить их значение. Например, полезна работа по выяснению роли корня нового слова, подбору аналогичных однокоренных слов, выяснению возможности замены иностранного термина на отечественный синоним, поиску примеров «из жизни» и т. д. Для желающих можно дать домашнее задание описать историю возникновения термина, собрав справочную информацию в Интернете. Предварительный семантический анализ значений новых слов является важным мотивационным этапом последующего процесса формирования соответствующих научных понятий, поскольку даже простейший этимологический анализ термина приводит к своего рода «микро-открытиям» (например, слово «атом» в переводе с греческого означает «неделимый». Греческая приставка «*а*- (*ан*-)» играет роль отрицания; сравнить: «аморальный», «асимметричный», «алогичный». Греческое tóμος (*том*) – делимый; сравнить: «том» – отдельная книга какого-нибудь сочинения, издания).

Постраничный анализ

Этот прием используется, если на уроке необходимо проанализировать достаточно большой объем текста (2–3 страницы). Учитель сам выбирает несколько фрагментов текста, в которых раскрываются наиболее важные аспекты изучаемого материала. Организуется фронтальное обсуждение этих фрагментов, выделяется и формулируется главное в прочитанном (основные мысли в тексте), основные выводы фиксируются в тетрадях учащихся.

Построчный анализ

В тексте выбирается один фрагмент текста (объемом не более одного–двух абзацев), который, во-первых, в том или ином виде содержит центральную идею темы (раздела, параграфа) и, во-вторых, несет эмоциональную нагрузку парадоксальности, неожиданности. На основе этого фрагмента организуется эвристическая беседа, в ходе которой раскрывается математическое содержание всего текста.

Выделение главного

Учащиеся самостоятельно читают текст и выбирают наиболее важные, с точки зрения математического содержания, предложения и абзацы. Выбранные фрагменты или выделяются непосредственно в тексте с помощью карандашных пометок, или в кратком виде фиксируются в тетради. Обсуждаются примеры, наиболее ярко раскрывающие основные идеи текста.

При этом внимание учащихся обращается на необходимость различения главной и второстепенной информации. После проведения такой работы ее результаты необходимо обсудить.

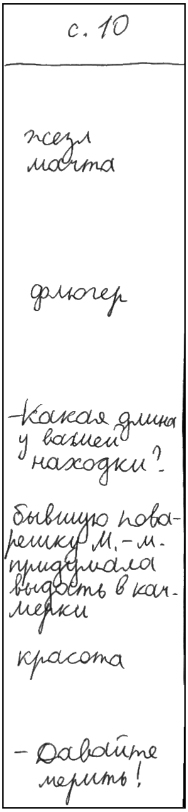
Описанный прием рекомендуется применять при организации предваряющего чтения, когда учащиеся знакомятся с новым материалом до пояснений учителя. Его можно использовать как в классной (для фрагментов текста объемом 1–2 страницы), так и в домашней работе (для небольших по объему глав).

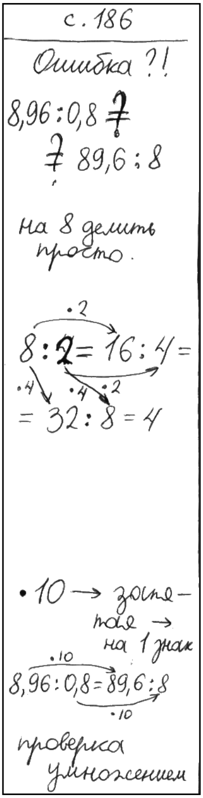
Изготовление закладок

Берется полоска бумаги длиной чуть больше высоты страницы и шириной 3–5 см. Она накладывается вертикально рядом с текстом, и на уровне верхнего края страницы на закладке делается отметка (горизонтальная черта). В результате такая полоска-закладка превращается в «накладные поля» для выбранной страницы (номер страницы обязательно указывается на закладке). На ней ученик отмечает важные фрагменты текста и комментирует их. Все записи на закладке делаются на уровне соответствующих строк текста. Наличие горизонтальной черты, отмечающей верхний край страницы, позволяет учителю легко осуществлять проверку закладок по своему учебнику.

Приведем примеры закладок, выполненных одним и тем же учеником 5-го класса в начале (глава 1) и конце обучения при работе с учебной книгой по теме «Натуральные числа и десятичные дроби» (Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012).

Мы видим, что сначала закладки отличаются излишней подробностью, в качестве поясняющих комментариев выписывают-





ся фразы из текста, много внимания уделяется элементам сюжета. Однако по мере накопления опыта работы с текстом закладки постепенно становятся краткими «конспектами на полях»: выделяется только основное математическое содержание, используются самостоятельные обозначения и комментарии.

Такой способ работы с текстом удобно использовать в качестве домашнего задания. Рекомендуется выполнить закладки по текстам глав, в которых содержится наиболее важный материал темы (после анализа этого материала в классе). Также можно использовать этот прием и как способ организации предваряющего чтения.

Учителю необходимо контролировать выполнение закладок и оценивать их как обычное домашнее задание. При этом в начале обучения желательно, кроме выставления оценки, письменно комментировать достоинства и недостатки каждой работы. Полезно предоставлять учащимся возможность доработать свои закладки.

Анализ рисунков

Содержание изучаемого материала восстанавливается в процессе обсуждения приведенных в тексте иллюстраций. При этом к каждому рисунку подбирается подпись и фиксируется в тетрадях учащихся. Обсуждение графического оформления текста и комментирование иллюстративного материала является важным условием для последующего смыслового чтения.

Чтобы применить прием анализа по рисункам, необходим текст, в достаточной степени насыщенный иллюстрациями. Его использование рекомендуется в случаях, когда необходимо быстро проанализировать фрагмент текста, а это затруднительно из-за его большого объема или резкой разницы в темпе чтения между учащимися класса.

Составление вопросов к тексту

Правильно говорят, что удачно поставленный вопрос – это наполовину полученный ответ. Более того, способность задавать качественные вопросы – это один из самых надежных критериев уровня интеллектуального развития человека.

Первичный анализ учебного текста целесообразно начинать с задавания вопросов (Что это? Почему? Какая связь? Зачем мне это нужно?). Цель учителя – создать ситуацию, когда ученик самостоятельно формулирует вопросы к новому учебному материалу. Например, ставится задача составить к тексту список вопросов, далее ученики в режиме просмотрового чтения знакомятся с текстом и после этого уточняют либо отменяют свои вопросы (целесообразно ограничить число вопросов и время на их составление).

Приведем вопросы, которые можно сформулировать вместе с учащимися при работе с разделом «Умножение натуральных чисел и десятичных дробей на 10, 100, 1000, ...» (Математика: учебная книга и практикум для 5 класса. Ч. 1, 2012).

Верно ли, что однозначное число и цифра – это одно и то же?

Если умножить какое-то натуральное число на 5, то какой цифрой может оканчиваться произведение?

Как умножить натуральное число на 100?

Почему не может быть верным правило: «Чтобы умножить десятичную дробь на 10, нужно приписать к ней справа один нуль»?

Что происходит с каждой цифрой числа при умножении его на 10?

Как умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д.?

Какие особые случаи бывают при умножении десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.?

В каком случае при умножении десятичной дроби на 1000 получится натуральное число?

Можно ли умножать натуральное число на 10, 100, 1000, ... по правилу для десятичной дроби?

Что происходит с числом, если мы переносим в нем запятую вправо? А если влево?

Как можно сказать по-другому: «Умножаем число на 10»?

Особую роль играют вопросы и обращения к ученику-читателю, которые подготавливают его к переходу в работе с текстом на уровень его объяснения: «Какова цель?», «Что общего?», «В каком направлении можно обобщить?», «Объясните начатое решение и продолжите его», «Какое решение выбрали бы вы?», «Каким методом вы бы посоветовали решить?», «Изменится ли способ решения, если...?», «Что произойдет, если...?», «Достаточно ли данных?», «Как проверить?», «Сравните свой подход с подходом, представленным в учебнике», «Оцените разные способы решения», «В чем ошибка и как ее исправить?» и т. д. Целесообразно провести обсуждение наиболее важных и интересных вопросов, заданных на этапе восприятия и анализа текста.

Можно предложить составить вопросы к тексту в качестве домашнего задания, но можно использовать этот прием и при работе в классе. Когда учащиеся достаточно хорошо овладеют приемом составления вопросов, полезным представляется организация соревнования на лучший вопрос и лучший ответ.

Составленные вопросы необходимо обязательно проверить (как обычное домашнее задание). Желательно дать ученикам возможность задать их на уроке: если вопрос корректен, на него отвечает кто-либо из учеников по выбору учителя или задающего вопрос; если формулировка неточна, ее исправляют в процессе обсуждения. Можно также провести письменный опрос (диктант), составленный из наиболее удачных вопросов, сформулированных учащимися.

Целесообразно рекомендовать к постоянному использованию вопросы из списка Э. Кинг, которые можно поставить к любому учебному тексту и с помощью которых можно осуществить его содержательный анализ (King, 1994).

Каким образом можно ... использовать для ...?
Что случится, если ...?
Что подразумевается под ...?
В чем сильные и слабые стороны ...?
На что похоже ...?
Что мы уже знаем о ...?
Каким образом ... влияет на ...?
Каким образом ... связано с тем, что мы изучили ранее?
Объясните, почему ...
Объясните, как ...

Почему важно ...?
В чем разница между ... и ...?
Чем похожи ... и ...?
Как можно применить ... в повседневной жизни?
Какой аргумент можно привести против ...?
Какой ... является лучшим и почему?
Какими могут быть возможные решения задачи?
Что, на ваш взгляд, является причиной ... и почему?
Согласны ли вы с утверждением, что ...?
Чем вы можете аргументировать свой ответ?
Как, по вашему мнению, посмотрел бы ... на вопрос ...?

4.3. Приемы преобразования учебного текста

Этот уровень понимания текста является более сложным, так как предполагает переход учащихся к объяснению текста, что требует установления разного рода связей, выявление закономерностей, использование разных способов представления учебной информации в режиме их взаимоперевода и т. д.

Ниже перечислены основные приемы работы с текстом, обеспечивающие его понимание на уровне объяснения.

Подбор заголовка к тексту

Учитель указывает границы небольшого фрагмента текста (1–2 абзаца), и учащиеся предлагают варианты заголовков для него. После обсуждения в тетрадях фиксируются 1–2 наиболее удачных заголовков. Такой прием позволяет подготовить учащихся к использованию более сложных способов работы с текстом: составлению плана, тезированию, конспектированию.

Составление плана

Для составления плана необходимо внимательно прочитать текст, разделить его на смысловые части, назвать их и установить их последовательность. Перед тем, как предлагать учащимся такую форму работы, необходимо предварительно освоить предыдущий прием (подбор заголовков к фрагментам текста).

Приведем пример плана, составленного одним из учащихся при работе с разделом «Умножение десятичных дробей».

1. Самая главная задача (задача-пик).
2. Удобный пример 0,2×0,3.
3. Как поставить запятую?
4. Решение примера с помощью площади прямоугольника.
5. Решение примера с помощью задачи про покупку кружев.
6. Решение примера с помощью свойства умножения (связь между увеличением множителя и увеличением произведения).
7. Правило умножения десятичных дробей.
8. Сколько разных правил умножения нужно знать?

Составление плана удобнее предлагать в качестве домашнего задания по главам большого объема.

Составление конспекта

Конспектирование – это краткое изложение, краткая запись содержания прочитанного. Разновидностью конспекта являются тезирование (очень краткое изложение основных мыслей прочитанного текста в виде отдельных предложений-тезисов), аннотирование (краткое изложение прочитанного текста с тем, чтобы его содержание было понятно другому человеку и вызвало бы его интерес к тексту в целом), составление логической граф-схемы.

На начальном этапе не ставится задача научить детей составлять подробные конспекты. Однако несколько раз в течение года учитель может показать учащимся, как содержание достаточно большого объема текста или информации может быть представлено в компактной форме.

Графическая систематизация

Перевод текстовой информации в графическую форму (схему, таблицу, диаграмму) способствует развитию базовых мыслительных операций, таких как анализ, синтез, сравнение, обобщение. Кроме того, одновременное использование словесно-символического, визуально и предметно-практического (в данном случае – двигательных ощущений при прорисовывании схем и таблиц) способствует более быстрому и качественному усвоению учебного материала. Наконец, этот прием является эффективным средством систематизации знаний (например, составление систематизирующих, сравнительных, обобщающих таблиц).

Учащихся следует ориентировать на создание индивидуальных графических моделей, что будет способствовать актуализации личного опыта ученика в процессе работы с текстом (целесообразно обсудить лучшие варианты таких «изобретенных» учениками визуальных иллюстраций).

4.4. Приемы конструирования учебного текста

Третий уровень понимания текста предполагает наиболее сложные формы мыслительной деятельности, связанные с его интерпретацией и самостоятельным созданием собственных (авторских) текстов. Именно этот уровень понимания учебного текста позволяет переходить от усвоения значений, представленных в тексте, к формированию смыслов, характеризующих личное отношение ученика к определенному учебному содержанию.

Основные приемы работы с текстом, обеспечивающие его понимание на уровне интерпретации и порождения авторских текстов, приводятся ниже.

Самостоятельное составление примеров и заданий

Ученики приводят свои собственные примеры (из жизни, собственного опыта) для иллюстрации тех или иных математических понятий. Задание самостоятельно придумать свои задачи предполагает составление не только задач, аналогичных представленным в тексте учебника, но и задач с необычным содержанием с обоснованием их целеназначения.

В качестве разновидности этого приема можно рассматривать составление контрольной работы для того, чтобы другие ученики могли проверить свои знания.

Комментарий

Этот прием включает целый ряд частных приемов: 1) соотнесение собственной точки зрения на возникшую проблему с текстом учебника; 2) пересказ содержания от имени другого лица (например, с точки зрения персонажей с разными познавательными стилями и т. д.); 3) рефлексия собственной деятельности (что хорошо понял, с чем не разобрался, какие пробелы обнаружил в знаниях, были ли допущены ошибки и почему и т. д.).

Составление тематического словаря

Тематический словарь можно постепенно пополнять в течение всего процесса изучения темы или составить на этапе заключительного повторения. В него должны войти определения или примеры с пояснениями для всех ключевых понятий курса, основные правила и алгоритмы.

Такая форма работы с текстом позволяет организовать повторение и сформировать умения искать информацию в текстах большого объема.

Составление предметного указателя

Этот прием анализа текста рекомендуется использовать на заключительных этапах работы с учебником. Прежде всего, необходимо сформировать список ключевых терминов в изученном материале (обсудив его вместе с учащимися).

Приведем примерный список терминов для темы «Натуральные числа и десятичные дроби» (в алфавитном порядке): буквенное выражение, вычитаемое, вычитание, деление, делимое, делитель, десятичная дробь, дециметр, единица, класс, миллиметр, натуральное число, нуль, округление, переместительный закон сложения, переместительный закон умножения, позиционная система счисления, площадь, разряд, распределительный закон, сантиметр, слагаемое, сложение, сочетательный закон сложения, сочетательный закон умножения, сравнение, сумма, счеты, таблица разрядов, уменьшаемое, умножение, уравнение, цифра, частное, числовое выражение, числовой луч.

Затем эти термины распределяются между учащимися (по 2–4 термина каждому ученику).

Задача составления предметного указателя (списка терминов с указанием страниц учебника, на которых они упоминаются) требует обсуждения стратегии ее решения. Можно достичь результата, если просмотреть весь учебник страница за страницей. Однако такой способ явно требует очень больших временных затрат. Более эффективен следующий подход: сначала выбрать главы, в тексте которых может упоминаться определенный термин, и только их просмотреть внимательно. Выбор для конкретного термина подходящих глав учебника является сам по себе очень полезным заданием. Его выполнение позволяет создать условия для установления связей внутри изученного материала, что дает возможность формировать математические знания учащихся в системе, а не фрагментарно.

Поиск конкретного термина в тексте выбранной главы также представляет собой самостоятельный методический прием. Он способствует формированию у учащихся умения осуществлять своеобразное «сканирование» текста: быстрый просмотр с узкой концентрацией внимания только на необходимой (заданной) информации.

Рецензирование

Рецензирование – это написание краткого отзыва с выражением своего отношения к прочитанному тексту, который содержит критический анализ и оценку. Основой написания рецензии служит потребность выразить личное отношение к тексту (его содержанию, тому, как он написан и насколько понятен), это попытка разобраться в своих впечатлениях, связанных с данным текстом. При этом рецензент должен обосновать свое мнение аргументированным анализом разных сторон текста. Таким образом, рецензия – это не просто пересказ текста, а прежде всего его анализ и интерпретация (то есть это своего рода творческий диалог автора и рецензента). Объектом рецензии может стать фрагмент текста учебника (учебной книги) либо письменная работа другого ученика.

Согласно рекомендациям С. В. Зыковой (2016), для 5–6-х классов можно использовать упрощенный план рецензии – «правило четырех П»: «Был ли ответ правильным, последовательным, полным, с примерами?».

С 7-го класса учащиеся уже могут составлять более глубокую рецензию, в том числе на доклад (ответ) своего соученика, руководствуясь следующими критериями:

- Общее впечатление от текста (удовлетворил ли ваши ожидания, что было особенно интересным и т. д.).
- Соответствует ли текст выбранной теме, не было ли отступлений от темы, ясно ли выражена идея ответа?
- Соблюдалась ли логика, последовательность в изложении материала?
- Все ли суждения аргументированны; какие доказательства использованы?

- Был ли ответ полным? Были ли фактические ошибки, неверные положения?
- Было ли выражено личное отношение к тому, о чем рассказывал ученик?
- Каково качество стиля речи (художественного, научного, публицистического)?
- Был ли сделан вывод?

Авторский текст

Создание авторского текста может иметь разный характер: подготовка развернутого сообщения (доклада в домашних условиях с использованием Интернета); сочинение рекламы (антирекламы), сказки либо сюжетной истории на основе учебного материала; участие в написании нового дополнительного параграфа для учебника и т. д.

Таким образом, формирование приемов работы с учебным текстом – это условие более глубокого понимания учебного материала и предпосылка успешности учебной математической деятельности.

Критериями уровня понимания прочитанного текста являются характеристики устных и письменных текстов, порожденных самим учеником (в том числе поставленные им вопросы и данные на них ответы, рисунок, таблица, пересказ, конспект, план, рецензия, доклад и т. д.):

- полнота воспроизведения основных значений исходного текста (умение выделить, систематизировать и словесно описать главные идеи и факты);
- наличие связей между высказываниями (умение сравнить и провести аналогию, выделить причинно-следственные связи, сформулировать закономерность, построить прогноз и т. д.);
- мера вариативности объяснения (умение отразить и проанализировать разные взгляды, разные подходы, включая альтернативные объяснения);
- степень обобщенности авторского текста (умение использовать общие категории, переходить от конкретных фактов к обобщениям и приводить конкретные примеры для общих формулировок);

- обоснованность – характер аргументов, которые используются для доказательства собственной гипотезы, своей точки зрения, предлагаемого подхода и т. д.
- готовность отвечать на разнообразные вопросы, а также самостоятельно задавать вопросы по исходному тексту и искать на них ответы с использованием дополнительных источников информации;
- личное (эмоционально-ценностное) отношение к тексту;
- творческое дополнение исходного текста (сочинение текстов разного типа и стиля, доклады, проектные исследования, оригинальные идеи «на математическую тему» в виде кроссворда, викторины, сюжета математического конкурса и т. п.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное назначение школы – это эффективная социализация подрастающего поколения и передача молодым людям опыта старших поколений (знаний, способов деятельности, культурных ценностей), а также формирование психических (интеллектуальных, личностных, коммуникативных, нравственных и т. д.) ресурсов каждого ученика. Нарастание динамичности, сложности и противоречивости жизни человека в условиях современного мира заставляет пересмотреть приоритеты в сфере школьного образования: на первый план должна выйти задача развития индивидуальных интеллектуальных ресурсов учащихся.

Попытки превратить школьное образование в практико-ориентированную образовательную систему (например, в виде задачи формирования «функциональной грамотности» выпускников школ, введения «интегративных» и прикладных учебных курсов за счет сокращения теоретических знаний и т. д.) могут привести к крайне негативным последствиям. Конечно, хорошо, если ученики умеют выполнять простейшие действия в типичных практических ситуациях (вычислить проценты при выплате кредита, написать резюме, общаться на английском языке, вести здоровый образ жизни и т. п.). Однако при этом не должна игнорироваться задача интеллектуального воспитания личности. Ибо интеллект – это не только способность к адаптации к требованиям социальной ситуации, но и способность к неадаптивному (надситуативному) поведению, когда человек способен изменять наличные обстоятельства на основе выявления некоторых скрытых закономерностей и прогноза будущих событий.

На наш взгляд, основные усилия по совершенствованию качества школьного обучения должны быть связаны с построением нового типа предметного содержания образования, сконструированного на основе требований психодидактического подхода, ориентированного на решение задачи интеллектуального воспитания школьников.

Предметное содержание школьного образования (включая и научно-теоретические, и практико-ориентированные аспекты, но с ведущей ролью фундаментальных научных знаний и способов теоретического мышления) является центральным фактором образовательного процесса с точки зрения влияния на формирование интеллектуальных ресурсов учащихся. Соответственно возникает вопрос о новых требованиях к учебным текстам, поскольку именно текст (учебников, учебных книг, практикумов и т. д.) является одним из основных инструментов влияния на интеллект учащихся. Работа с текстом – понимание, интерпретация, самостоятельное создание авторских текстов – это важнейшее условие интеллектуального воспитания личности в процессе школьного обучения.

Предлагаемый нами подход к интеллектуальному воспитанию учащихся средствами специально сконструированных развивающих учебных текстов создает условия для обогащения основных компонентов умственного опыта ученика, содействуя тем самым его интеллектуальному росту. Проведенные нами исследования подтверждают, что обучение математике в условиях использования учебных текстов проекта «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ) – сравнительно с традиционной формой обучения – действительно приводит к увеличению показателей основных интеллектуальных способностей (Будрина, 2009, 2010).

Таким образом, каким будет содержание современного школьного образования – это отнюдь не только и не столько методическая проблема. Ибо цена данного вопроса безмерно высока, поскольку выбор приоритетов школьного образования имеет непосредственное отношение к качеству российского общества: будет ли оно в ближайшей перспективе состоять из эффективных исполнителей-потребителей либо из умных людей, способных успешно решать встающие перед ними жизненные, профессиональные и социальные проблемы.

Литература

Баранов А.Н. Введение в прикладную лингвистику: Учебное пособие. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

Бахтин М.М. Автор и герой. К философским основам гуманитарных наук. СПб., 2000.

Бейлинсон В.Г. Арсенал образования. М.: Книга, 1986.

Берн Э. Игры, в которые играют люди. Психология человеческих взаимоотношений: Люди, которые играют в игры. М.: Прамед, 1992.

Боженкова Л.И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии. Издательство: КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007.

Борисова С.А. Онтологическая триада пространство–человек–текст как специфическая коммуникативная система (Психолингвофилософское исследование): Дис. ... докт. филол. наук. М., 2004.

Брудный А.А. Психологическая герменевтика. М.: Лабиринт, 1998.

Будрина Е.Г. Динамика интеллектуального развития подростков в условиях разных моделей обучения // Психологический журнал. 2009. Т. 30. № 4. С. 33–46.

Будрина Е.Г. Специфика интеллектуального развития подростков в условиях разных моделей обучения // Экспериментальная психология. 2010. Т. 3. № 1. С. 115–130.

Веккер Л.М. Психические процессы. Мышление и интеллект. Т. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

Волкова Е.В. Технология диагностики и формирования интеллектуальной компетентности // Методы психологического обеспечения профессиональной деятельности и технологии развития ментальных ресурсов человека / Отв. ред. А.Л. Журавлев, Л.Г. Дикая, М.А. Холодная. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2014. С. 244–265.

Волкова Л.Б. Диалог в речемыслительной деятельности. Экспериментальные исследования вопросов к тексту: Дис. ... канд. филол. наук. СПб., 1995.

Выготский Л.С. Педагогическая психология / Под ред. В.В. Давыдова. М.: Педагогика, 1991.

Гельфман Э.Г. Методические основы конструирования учебных текстов по математике для учащихся основной школы. Томск: Изд-во ТГУ–ТГПУ, 2004.

Гельфман Э.Г., Дозморова Е.В., Демидова Л.Н. Обогащающий учебный текст – средство формирования универсальных учебных действий // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II Международной научной конференции. М: МПГУ, 2014. С. 52–58.

Гельфман Э.Г., Подстригич А.Г. Учебный проект как способ мониторинга интеллектуальных возможностей учащихся на уроках математики // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 3 (54). С. 57–60.

Гельфман Э.Г., Холодная М.А. Психодидактика школьного учебника: Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер, 2006.

Генденштейн Л.Э. Анатомия интереса // Проблемы школьного учебника. Вып. 18. Язык и стиль школьных учебников. М.: Просвещение, 1988. С. 101–123.

Граник Г.Г., Бондаренко С.М., Концевая Л.А. Когда книга учит. М.: Педагогика, 1991.

Граник Г.Г., Концевая Л.А., Бондаренко С.М. О реализации закономерностей понимания в учебном тексте // Проблемы школьного учебника / Сост. Г.А. Молчанов. М.: Просвещение, 1991. Вып. 20. С. 45–61.

Граник Г.Г., Бондаренко С.М., Якиманская И.С. Психологические основы создания школьных учебников // Московская психологическая школа: История и современность: В 3 т. / Под ред. В.В. Рубцова. Т. 1. М.: ПИ РАО–МГППУ, 2004. С. 268–287.

Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. М.: Интор, 1996.

Деррида Ж. О грамматологии. М.: Ad Marginem, 2000.

Доблаев Л.П. Смысловая структура учебного текста и проблемы его понимания. М.: Педагогика, 1982.

Дозморова Е.В. Возможности развития творческого мышления обучающихся 5–6-х классов на уроках математики с помощью вопросов // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2008. Вып. 2 (76). С. 5–8.

Донской Г.М. Типологические свойства современного учебника // Проблемы школьного учебника: Типология школьных учебников. Вып. 15. М.: Просвещение, 1985. С. 70–86.

Жохов А.Л. Как помочь формированию мировоззрения школьников: Книга для учителя и не только для него. Самара: Изд-во СамГПУ, 1995.

Занков Л.В. Избранные педагогические труды. М.: Фёдоров, 1999.

Зинченко А.П. Игровая педагогика. Тольятти, 2000.

Зыкова С.В. Формирование универсальных учебных действий при работе с текстами научного стиля. URL: http://imc-peterhof.spb.ru/stati/materialy/rabota-s-tekstami-nauchnogo-stilya (дата обращения: 10.02.2016).

Иванов Вяч.Вс. О соотношении этимологии и реконструкции текста // Этимология. М., 1986. С. 66–70.

Каким быть учебнику: Дидактические принципы построения/ Под ред. И. Я. Лернера, Н. М. Шахмаева. М.: Изд-во РАО, 1992.

Кларин М.В. Инновации в обучении: Метафоры и модели. Анализ зарубежного опыта. М.: Наука, 1997.

Когаловский С.Р. Место и роль метапредметной деятельности в обучении математике // Школьные технологии. 2014. № 3. С. 71–77.

Когаловский С.Р. Метапредметная деятельности в обучении математике // Научный поиск. № 1 (15). 2015. С. 58–66.

Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года. М., 2001.

Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968.

Крутский А.Н. Психодидактика среднего образования. Барнаул, БГПУ, 2008.

Ксенева В.Н. Развитие системности мыслительных операций учащихся как условие продуктивной учебной деятельности (на примере изучения темы «Целые числа») // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 3. С. 39–43.

Кузнецова Н.А. Дидактические проблемы понимания учебного текста старшеклассниками: На материале гуманитарных предметов: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. Красноярск, 1998.

Кулюткин Ю.Н. Анализ функциональных стилей учебного текста // Проблемы школьного учебника. М.: Просвещение, 1977. Вып. 5. С. 91–97.

Лернер И.Я. Методологические проблемы дидактической теории построения учебника // Каким быть учебнику: Дидактические принципы построения / Под ред. И. Я. Лернера, Н. М. Шахмаева. Ч. 1. М.: Изд-во РАО, 1992. С. 7–26.

Лингвистический энциклопедический словарь / Гл. ред. В. Н. Ярцева. М.: Советская энциклопедия, 1990.

Лотман Ю.М. Внутри мыслящих миров. Человек–текст–семиосфера. М.: Языки русской культуры, 1996.

Матюшкин А.М. Мышление. Обучение. Творчество. М.: Изд-во МПСИ; Воронеж: НПО «Модэк», 2003.

Обогащающая модель обучения в проекте МПИ: Проблемы, раздумья, решения. Вып. 1 / Под ред. Э. Г. Гельфман. Томск: Изд-во ТГУ, 2002.

Олейникова Е.В. Влияние стиля учения на понимание школьниками учебных текстов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 12. Психология. Социология. Педагогика. 2009. № 2. С. 185–191.

Панов В.И. Психодидактика образовательных систем: Теория и практика. СПб.: Питер, 2007.

Петер Р. Игра с бесконечностью. М.: Прогресс, 1968.

Подольский А.И. Системная психодидактика. Магнитогорск: Творчество, 2005.

Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1970.

Полани М. Личностное знание: На пути к посткритической философии. М.: Прогресс, 1985.

Проблемы школьного учебника: XX век: Итоги / Под ред. Д. И. Зуева. М.: Просвещение, 2004.

Просвирова И.Г. Особенности мотивации учебной деятельности у учащихся младшего подросткового возраста // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 10 (61). С. 61–64.

Пунский В.О. О некоторых новых требованиях к будущим учебникам // Проблемы школьного учебника. Сб. ст. Вып. 20. Материалы Всесоюзной конференции «Теория и практика создания школьных учебников» / Сост. Г. А. Молчанова. М.: Просвещение, 1991. С. 62–68.

Пустынникова А.М., Лизура Н.Ю., Сазанова Т.А. Обогащающее повторение на уроках математики. Учебное пособие. Томск: Оптимум, 2004.

Рахимов А.З. Психодидактика: Теория и практика психолого-педагогической инноватики, технологизации и акмеологизации образования. Уфа: Творчество, 2003.

Руднев В.П. Энциклопедический словарь культуры XX в. М., 2001.

Сметанникова Н.Н. Обучение стратегиям чтения в 5–9 классах: как реализовать ФГОС. Пособие для учителя. М.: Балласс, 2011.

Смолякова Д.В. Учебные тексты по истории математики как средство интеллектуального воспитания учащихся основной школы // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 3 (54). С. 36–39.

Стернберг Р. (ред.). Практический интеллект. СПб.–М.: Питер, 2002.

Суворова Е.П., Воюшина М.П., Купирова Е.А. Формирование интеллектуально-речевой и читательской культуры школьников: междисциплинарный подход: Научно-методическое пособие. СПб.: ООО «Книжный дом», 2008.

Тарасов Л.В. Возможности совершенствования языка и стиля школьных учебников физики, химии и биологии // Проблемы школьного учебника. Сб. ст. Вып. 18. Язык и стиль школьных учебников. М.: Просвещение, 1988. С. 185–201.

Тихомирова Т.Н., Ковас Ю.В. Роль когнитивных показателей учащихся старшего школьного возраста в успешности решения математических заданий // Знание. Понимание. Умение. 2012. № 2. С. 237–244.

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Ч. 1: Начальное общее образование. Основное общее образование: Ч. 2: Среднее (полное) общее образование. М.: Изд-во «Министерство образования РФ», 2004.

Хейзинга Й. Homo Ludens. Статьи по истории культуры. М.: Прогресс-Традиция, 1997.

Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб.: Питер, 2002.

Холодная М.А. Когнитивные стили: О природе индивидуального ума. СПб.: Питер, 2004.

Холодная М.А. Психология понятийного мышления: от концептуальных структур к понятийным способностям. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2012.

Холодная М.А., Гельфман Э.Г. Психодидактические образовательные технологии как фактор интеллектуального воспитания учащихся // Народное образование. № 8. 2014. С. 111–119.

Чепракова Е.М., Фролов А.А. Педагогическая технология адаптации учащихся к предметному образованию в основной школе // Образование и наука. 2015 № 6 (125). С. 22–38.

Чернявская В.Е. Когнитивная лингвистика и текст: необходимо ли новое определение текстуальности // Вопросы когнитивной лингвистики. 2005. № 2. С. 77–84.

Щирова И.А., Гончарова Е.А. Многомерность текста: понимание и интерпретация: Учебное пособие. СПб.: ООО «Книжный Дом», 2007.

Эко У. Роль читателя. Исследования по семиотике текста. М., 2005.

Эльконин Д.Б. Психология игры. 2-е изд. М.: Владос, 1999.

Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. М.: Сентябрь, 1996.

Ясюкова Л.А. Закономерности развития понятийного мышления и его роль в обучении. СПб.: ГП «Иматон», 2005.

Alexander P.A. The path to competence: A lifespan developmental perspective on reading. White Paper. Oak Creek, WI: National Reading Conference, 2005.

Anderson A., Anderson J., Shapiro J. Mathematical discourse in storybook reading // Journal for Research in Mathematics Education. 2004. V. 35 (1). P. 5–33.

Ball D.L., Cohen D.K. Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? // Educational Researcher.1996. V. 25 (9). P. 6–14.

Bikner-Ahsbahs A. Towards the emergence of constructing mathematical meanings // Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2004. V. 2. P. 119–126.

Brousseau G. Theory of didactical situation in mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Klumer, 1997.

Burke L.A., Williams J.M. Developing young thinkers: An intervention aimed to enhance children's thinking skills // Thinking Skills and Creativity. 2008. V. 3. P. 104–124.

Dehaene S. The Number Sense. N. Y.: Oxford University Press, 1997.

Halberda J., Feigenson, L. Developmental change in the acuity of the "Number Sense": The Approximate number system in 3-, 4-, 5-, 6-year-olds and adults // Developmental Psychology. 2008. V. 44 (5). P. 1457–1465.

Hershkowitz R., Schwarz B., Dreyfus T. Abstraction in context: Epistemic actions // Journal for Research in Mathematics Education, 2001. V. 32. P. 195–222.

Jenner A. Experiencing and understanding Mathematics in the midst of a story // Teaching Children Mathematics. 2002. V. 9 (3). P. 67–171.

King A. Inquiry as a tool in critical thinking // D. F. Halpern (Ed.). Changing college classrooms: New teaching and learning strategies in an increasingly complex world. San Francisco: Jossey-Bass, 1994. P. 13–38.

Love E., Pimm D. 'This is so': A text on texts // A. Bishops, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds). International handbook of mathematics education. Boston: Kluwer Academic Publishing, 1996. P. 371–409.

McNamara D.S., Kintsch E., Songer N.B., Kintsch W. Are good texts always better? Interactions of text coherence, background knowledge, and levels of understanding in learning from text // Cognition and Instruction. 1996. V. 14 (1). P. 1–43.

Schur Y., Skuj M., Zietsman A., Fridjhon P. A thinking journey based on constructivism and mediated learning experience as a vehicle for teaching science to low functioning students and enhancing their cognitive skills // School Psychology International. 2002. V. 23 (1). P. 36–67.

Selby J.W., Calhoun L.G. Psychodidactics: An undervalued and underdeveloped treatment tool of psychological intervention // Professional Psychology. 1980. V. 11 (2). P. 236–241.

Siegler R.S., Opfer J.E. The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity // Psychological Science. 2003. V. 14 (3). P. 237–243.

Simon M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective // Journal for Research in Mathematics Education, 1995. V. 26. P. 114–145.

Simon M., Tzur R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the Hypothetical Learning Theory // Mathematical Thinking and Learning. 2004. V. 6 (2). P. 91–104.

Volkova E.V. Cognitive learning technology: DT-approach // Procedia – Social and Behavior Sciences. 2005. V. 171. P. 1330–1339.

Walters J., Gardner H. The crystallizing experience: discovering an intellectual gift // Conceptions of giftedness. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. P. 306–331.

Weinberg A., Wiesner E. Understanding mathematical textbooks through reader-oriented theory // Educational Studies in Mathematics. 2011. V. 76. P. 49–63.

Приложение 1

Состав УМК МПИ для 5–9-х классов

Состав УМК МПИ для 5–6-х классов

1. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А., Кузнецова М.В.* Математика. Программа для основной школы. 5–6 классы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 95 с.
2. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А., Ксенева В.Н., Лобаненко Н.Б., Матушкина З.П., Просвирова И.Г., Холодная О.В., Шевцова Л.А.* Математика: методическое пособие для 5 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 231 с.
3. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А., Гриншпон С.Я., Жилина Е.И., Ксенева В.Н., Лобаненко Н.Б., Матушкина З.П., Просвирова И.Г., Холодная О.В., Шевцова Л.А.* Математика: методическое пособие для 6 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 248 с.
4. *Гельфман Э.Г., Холодная О.В.* Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 1. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 152 с.
5. *Гельфман Э.Г., Холодная О.В.* Математика. 5 класс. Учебник. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 111 с.
6. *Гельфман Э.Г., Холодная О.В.* Математика. 6 класс. Учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 200 с.
7. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Лобаненко Н.Б., Вольфенгаут Ю.Ю., Гриншпон С.Я., Жилина Е.И., Ксенева В.Н., Малова И.Е., Матушкина З.П., Непомнящая Л.Б., Панчищина В.А., Холодная М.А., Эпп В.Я.* Математика: учебная книга и практикум для 5 класса: в 2 ч. Ч. 1. Натуральные числа и десятичные дроби. 8 изд., исправл. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 240 с.
8. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Лобаненко Н.Б., Жилина Е.И., Вольфенгаут Ю.Ю., Гриншпон С.Я., Забарина А.И., Ксенева В.Н., Кушниренко Т.В., Малова И.Е., Матушкина З.П., Непомня-*

щая Л.Б., Панчищина В.А., Холодная М.А., Эпп В.Я. Математика: учебная книга и практикум для 5 класса: в 2 ч. Ч. 2. Положительные и отрицательные числа. 5 изд., исправл. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 168 с.

9. *Гельфман Э.Г., Гриншпон С.Я., Демидова Л.Н., Лобаненко Н.Б., Вольфенгаут Ю.Ю., Малова И.Е., Матушкина З.П., Жилина Е.И.* Математика: учебная книга и практикум для 6 класса: в 2 ч. Ч. 1. Делимость чисел. 4-е изд. испр. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 184 с.
10. *Гельфман Э.Г., Жилина Е.И., Лобаненко Н.Б., Демидова Л.Н., Вольфенгаут Ю.Ю., Гриншпон И.Э., Гриншпон С.Я., Ксенева В.Н., Малова И.Е., Матушкина З.П., Непомнящая Л.Б., Панчищина В.А., Просвирова И.Г., Холодная М.А.* Математика: учебная книга и практикум для 6 класса: в 2 ч. Ч. 2. Рациональные числа. 6 изд. испр. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 216 с.
11. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Просвирова И.Г., Зильберберг Н.И., Подстригич А.Г.* Математика: рабочая тетрадь для 5 класса. Натуральные числа. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 96 с.
12. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Просвирова И.Г., Зильберберг Н.И., Подстригич А.Г.* Математика: рабочая тетрадь для 5 класса. Десятичные дроби. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 96 с.
13. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Просвирова И.Г., Зильберберг Н.И., Подстригич А.Г.* Математика: рабочая тетрадь для 6 класса. Положительные и отрицательные числа. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 120 с.
14. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Просвирова И.Г., Зильберберг Н.И., Подстригич А.Г.* Математика: рабочая тетрадь для 6 класса. Делимость чисел. Рациональные числа. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 120 с.
15. Компьютерный комплекс «Компетентность. Инициатива. Творчество» (КИТ); представлен на портале «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов» в разделе «Математика» для 5 и 6 классов (http://school-collection/edu/ru).

Состав УМК МПИ для 7–9-х классов

1. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А., Кузнецова М.В.* Алгебра. Программа для основной школы. 7–9 классы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 96 с.

2. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А., Ксенева В.Н., Лобаненко Н.Б., Матушкина З.П., Просвирова И.Г., Холодная О.В., Шевцова Л.А.* Математика: методическое пособие для 7–9 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016 (в печати).
3. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Терре А.И., Гриншпон С.Я., Бондаренко Т.Е., Кривякова Э.Н., Лобаненко Н.Б., Матушкина З.П., Пичурин Л.Ф., Росошек С.К.* Алгебра: учебник для 7 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 264 с.
4. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Гриншпон С.Я., Терре А.И., Ксенева В.Н., Кривякова Э.Н., Вольфенгаут Ю.Ю., Забарина А.И., Зильберберг Н.И., Лобаненко Н.Б., Малова И.Е., Матушкина З.П., Непомнящая Л.Б., Пичурин Л.Ф., Сазанова Т.А., Эпп В.Я.* Алгебра: учебник для 8 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 272 с.
5. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Терре А.И., Пестов Г.Г., Гриншпон С.Я., Росошек С.К., Малова И.Е., Подстригич А.Г., Панчищина В.А., Аржаник М.Б., Гесслер Д.М., Гриншпон И.Э., Вольфенгаут Ю.Ю., Лобаненко Н.Б., Пивен Г.Г., Эпп В.Я.* Алгебра: учебник для 9 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 272 с.
6. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Терре А.И., Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э., Просвирова И.Г., Зильберберг Н.И., Бухтяк М.С., Матушкина З.П., Кривякова Э.Н., Ксенева В.Н., Холодная М.А.* Алгебра – 7: практикум. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 252 с.
7. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э., Терре А.И., Вольфенгаут Ю.Ю., Зильберберг Н.И., Ксенева В.Н., Матушкина З.П., Панчищина В.А., Просвирова И.Г., Холодная М.А.* Алгебра – 8: практикум. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 246 с.
8. *Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э., Терре А.И., Вольфенгаут Ю.Ю., Зильберберг Н.И., Ксенева В.Н., Матушкина З.П., Панчищина В.А.,Просвирова И.Г., Холодная М.А.* Алгебра – 9: практикум. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016 (в печати).

Приложение 2

Фрагмент текста из учебника для 7-го класса

Бросая в воду камешки, смотри
на круги, ими образуемые;
иначе такое бросание будет
пустою забавою.

Козьма Прутков

§ 15 Формула квадрата суммы (разности)

Знакомимся с формулой квадрата суммы

Чтобы умножить один многочлен на другой многочлен, нужно каждый одночлен одного многочлена умножить на каждый одночлен другого многочлена и полученные произведения сложить.

Однако для некоторых многочленов процедуру умножения можно сократить. Предлагаем рассмотреть некоторые из них.

Начнём с исследования степеней двучлена. Предлагаем выполнить три задания.

Задание 1.

1) Представьте квадрат двучлена $a+b$ в виде многочлена.
2) Проверьте равенство $(3x+5y)^2=9x^2+30xy+25y^2$.
3) Замените произведение $(a+b)(a+b)$ равным ему трёхчленом.

При выполнении данного задания потребовалось провести следующие преобразования

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

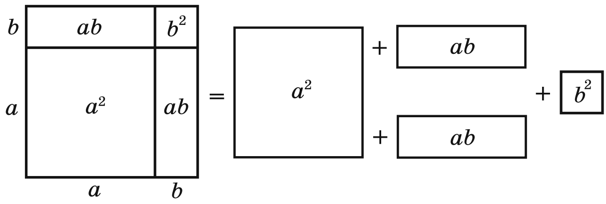
Получилось, что $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Это тождество говорит о том, что при возведении двучлена во вторую степень всегда будет получаться трёхчлен одного и того же вида. Если его запомнить, то промежуточные преобразования можно пропустить.

Задание 2. Вычислите устно: $(60+1)^2$; 102^2.

Например: $(60+1)^2=60^2+2\cdot 60\cdot 1+1^2=3600+120+1=3721.$

Задание 3. Перейдите от геометрической иллюстрации равенства к его алгебраической записи.



В предыдущих заданиях вы встретились с равенством

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Это равенство является тождественным, то есть тождеством. С тождествами вы встречались уже много раз. Например, дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения можно выразить тождеством

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Это тождество показывает, как можно преобразовать произведение в сумму (раскрытие скобок).

Если посмотреть на то же самое тождество с другой стороны, то оно будет показывать, как преобразуется сумма в произведение (вынесение множителя за скобки):

$$ab + ac = a(b+c).$$

Получается, что каждое тождество задаёт два вида преобразований алгебраических выражений.

Тождество $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ тоже задаёт два вида преобразований, две формулы.

В ситуации, когда мы будем переходить от квадрата суммы двух целых выражений к многочлену, будем записывать тождество в виде формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Когда же мы будем выполнять обратное преобразование, тогда будем записывать это же тождество в виде формулы

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$$

Названия формул мы будем давать по виду левой части равенства.

Фрагмент текста из учебника для 7-го класса

Поработаем с первой формулой.

Запись формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Название формулы:

формула квадрата суммы.

Чтение формулы:

Квадрат суммы двух алгебраических выражений равен квадрату первого слагаемого плюс удвоенное произведение первого слагаемого на второе плюс квадрат второго слагаемого.

Схема формулы:

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\square\bigcirc + \bigcirc^2.$$

Распознаём квадрат суммы (разности)

Получена формула квадрата суммы двух алгебраических выражений. Какие алгебраические выражения можно преобразовать с помощью этой формулы? Выполняя следующие задания, постарайтесь выделить признаки таких выражений.

Задание 4. Верно ли, что данные степени можно преобразовать в квадрат двучлена:

а) $(x+y)^2$; б) $(-a+b)^2$; в) $(2c+3d)^2$;
г) $(a-b)^2$; д) $(-a-b)^2$; е) $(a+b+c)^2$?

Например, рассмотрим выражение $(-a-b)^2$.

1. Если присмотреться к выражению $(-a-b)^2$, то в нём можно увидеть левую часть знакомой формулы:

$$(-a-b)^2 = ((-a)+(-b))^2.$$

Запись $(-a-b)^2$ как будто является маской, за которой скрывается квадрат суммы, а мы эту маску сняли. Тогда

$$(-a-b)^2 = (\boxed{-a} + (-b))^2 = \boxed{-a}^2 + 2\boxed{-a}\,(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Можно начать преобразования с вынесения за скобки минуса:

$$(-a-b)^2 = (-(a+b))^2 = ((-1)(a+b))^2 =$$
$$= (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Итак, $(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Аналогично можно преобразовать выражение пункта г):

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Получена формула $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Она называется *формулой квадрата разности*.

Выражение $(a+b+c)^2$ из пункта е) тоже можно преобразовать по формуле квадрата суммы, например, так:

$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Получена формула

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Её называют формулой квадрата трёхчлена.

Итак, доказаны

Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Можно запомнить все три формулы, так как они часто встречаются в практике преобразований алгебраических выражений, а можно запомнить только первую формулу и помнить, что две другие формулы сокращённого умножения могут быть получены из неё.

Задание 5. Вычислите квадраты чисел, используя формулу квадрата суммы:

а) 97^2; б) $\left(10\frac{1}{10}\right)^2$; в) $(-999)^2$;

г) $(-103)^2$; д) $(-7,7)^2$; е) $(-103,1)^2$.

Например:

$$97^2=(100+(-3))^2=100^2+2\cdot100\cdot(-3)+(-3)^2=$$
$$=10\,000-600+9=9\,409.$$

Задание 6. Перед вами три ящика и десять карточек с алгебраическими выражениями (см. рис. 18). Разложите карточки по соответствующим ящикам.

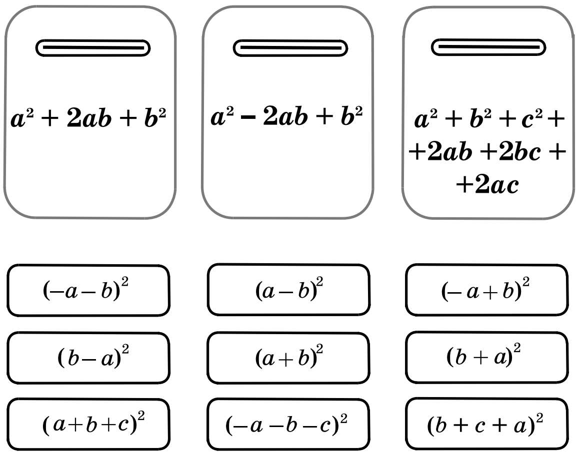


Рис. 18

Остался ли у вас какой-нибудь ящик пустым? Остались ли карточки вне ящиков? Не оказались ли все карточки в одном ящике?

Задание 7. Выпишите выражения, которые можно преобразовать с помощью формулы квадрата суммы:

а) $(x-3)(x-3)$;
б) $(2a-5{,}7b)2a$;
в) $(a-5)(a+5)$;
г) $(1-a)^4$;
д) $(x^2+y^2)^2$;
е) $(d-2)(2-d)$;
ж) $(3m+4n)^2$;
з) $(1{,}2-5xy^6)^2$;
и) $(5a-2b+6c)(6c+5a-2b)$;
к) $(-5m-2{,}2n)^2$.

По каким признакам вы определяли, что выражение может быть преобразовано с помощью формулы квадрата суммы?

Составьте памятку для распознавания тех выражений, которые являются квадратами суммы. Сравните свою памятку со следующей.

Алгебраическое выражение преобразуется по формуле квадрата суммы

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\square\bigcirc + \bigcirc^2,$$

если выполняются два условия:

1) выражение представляет собой (или может быть представлено как) степень с показателем 2;

2) основание степени есть (или может быть представлено как) сумма двух выражений.

Задание 8. Составьте два алгебраических выражения, которые можно преобразовать по формуле квадрата суммы.

(Алгебра: учебник для 7 класса, 2013, с. 97–102)

Научное издание

Холодная Марина Александровна,
Гельфман Эмануила Григорьевна

РАЗВИВАЮЩИЕ УЧЕБНЫЕ ТЕКСТЫ
КАК СРЕДСТВО
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ

Редактор – *О.В. Шапошникова*
Оригинал-макет, обложка и верстка – *С.С. Фёдоров*

Лицензия ЛР № 03726 от 12.01.01
Издательство «Институт психологии РАН»
129366, Москва, ул. Ярославская, д. 13
Тел.: (495) 682-61-02; E-mail: vbelop@ipras.ru; www.ipras.ru

Сдано в набор 19.04.16. Подписано в печать 06.05.16
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура SchoolBookC. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 8,3
Тираж 1000 экз. Заказ